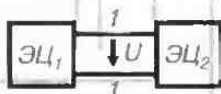
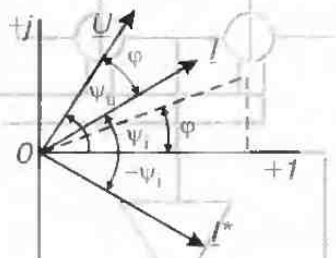
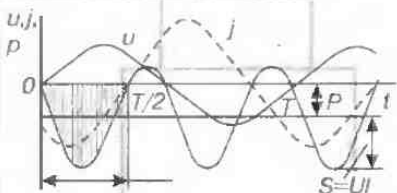
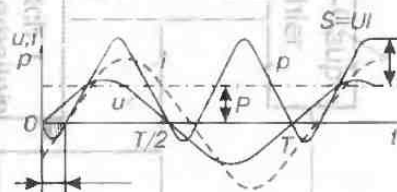




Теоретические Основы Электротехники

курс лекций

- Физические основы электротехники
- Воздействия и сигналы в электрических цепях
- Элементы электрических цепей
- Цепи с распределенными параметрами
- Нелинейные электрические цепи



6203
П85
13.12.2003
1981

В. А. Прянишников

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

КУРС ЛЕКЦИЙ

4-е издание

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
для студентов высших и средних учебных заведений*

230012

**Библиотека
СЕВМАШВТУЗА**

Санкт-Петербург
КОРОНА принт
2004

ББК 31.21
П85

Прянишников В. А.

Теоретические основы электротехники: Курс лекций. — 4-е изд. — СПб.: КОРОНА принт, 2004. — 368 с., ил.

ISBN 5-7931-0104-7

Курс лекций по теоретическим основам электротехники соответствует программам курсов «ТОЭ» и «Теория электрических цепей» и может быть использован при изучении таких дисциплин, как «Электротехника и основы электроники» и «Электротехника». Курс содержит 33 лекции и включает все основные разделы теории электрических цепей. Лекции содержат тщательно подобранные иллюстрации и таблицы, которые можно использовать как наглядные пособия.

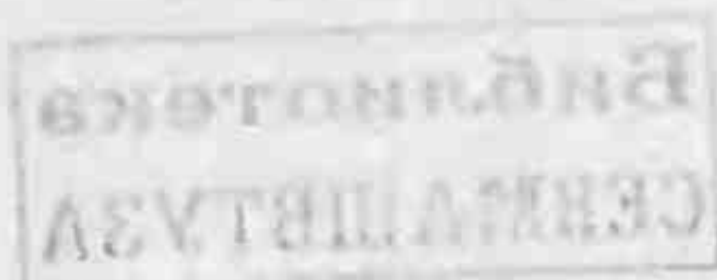
Издательство «КОРОНА принт»

Оптовая торговля:

(812) 259-68-17; 251-33-94

E-mail: coronapr@online.ru

*Книга — почтой: 198005, Санкт-Петербург,
Измайловский пр., 29 (для «КОРОНЫ принт»)*



ISBN 5-7931-0104-7

© КОРОНА принт, 2004

© Прянишников В. А., 2000

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
Введение	7

Раздел 1. Физические основы электротехники

Лекция 1. Уравнения электромагнитного поля и способы описания электромагнитных явлений. Понятие об электрическом токе	11
Лекция 2. Основные понятия и законы электрической цепи.	24

Раздел 2. Электрические воздействия и сигналы

Лекция 3. Гармонические воздействия и способы их описания	31
Лекция 4. Периодические негармонические воздействия и способы их описания.	37
Лекция 5. Непериодические воздействия и способы их описания	45

Раздел 3. Элементы электрических цепей

Лекция 6. Источники напряжения и тока	62
Лекция 7. Резистивные элементы в электрической цепи	69
Лекция 8. Индуктивные элементы в электрической цепи	74
Лекция 9. Емкостные элементы в электрической цепи	83
Лекция 10. Индуктивно связанные элементы	91
Лекция 11. Активные элементы в электрической цепи	103
Лекция 12. Преобразователи сопротивлений и проводимостей пассивных элементов	113

Раздел 4. Расчет электрических цепей в стационарном режиме

Лекция 13. Расчет цепей синусоидального переменного тока по мгновенным значениям	121
Лекция 14. Расчет цепей синусоидального переменного тока по комплексным значениям	127
Лекция 15. Расчет цепей при несинусоидальном периодическом напряжении	141
Лекция 16. Резонансы в электрических цепях.	149
Лекция 17. Энергия и мощность в электрических цепях	163

**Раздел 5. Расчет электрических цепей
в нестационарном режиме**

Лекция 18. Расчет переходных процессов по мгновенным значениям	174
Лекция 19. Расчет переходных процессов по комплексным значениям	189

Раздел 6. Методы расчета сложных электрических цепей

Лекция 20. Топология электрических цепей и их эквивалентные преобразования	202
Лекция 21. Расчет электрических цепей по законам Кирхгофа	210
Лекция 22. Расчет электрических цепей методом узловых напряжений	222
Лекция 23. Расчет электрических цепей методом контурных токов	230
Лекция 24. Расчет электрических цепей методом сигнальных графов	237

Раздел 7. Трехфазные цепи

Лекция 25. Трехфазные цепи при соединении звездой	248
Лекция 26. Трехфазные цепи при соединении треугольником	257

Раздел 8. Электрические фильтры

Лекция 27. Пассивные электрические фильтры	265
Лекция 28. Активные электрические фильтры	282

Раздел 9. Цепи с распределенными параметрами

Лекция 29. Линии передачи с потерями в стационарном режиме	301
Лекция 30. Линия без потерь в стационарном режиме	312
Лекция 31. Нестационарные процессы в длинных линиях	325

**Раздел 10. Нелинейные электрические цепи
в стационарном режиме**

Лекция 32. Электрические цепи с нелинейными резистивными элементами	333
Лекция 33. Электрические цепи с нелинейными реактивными элементами	347
Контрольные вопросы	361
ЛИТЕРАТУРА	366

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга посвящена теоретическим основам электротехники (ТОЭ). Круг вопросов, которые составляют эту фундаментальную дисциплину, весьма широк и разнообразен. Этой дисциплине посвящено много прекрасных учебников и монографий, краткий и далеко не полный перечень которых приведен в списке литературы. Один из самых первых учебников по этой дисциплине был написан основателем электротехнической школы России Карлом Адольфовичем Кругом* в 1916 году [1]. Позднее появились учебники Григория Иосифовича Агабекова [2, 3], Г. В. Зевеке и П. А. Ионкина [4], Л. Р. Неймана и П. Л. Калантарова [5], К. М. Поливанова [6], А. В. Нетушила и С. В. Страхова [7]. В результате многолетней работы сложились две ведущие электротехнические школы — одна в Московском Энергетическом Институте (МЭИ), другая в Санкт-Петербургском техническом университете (ЛПИ).

Эти и некоторые другие учебники [8, 9, 10] в основном написаны по классической схеме, предложенной К. А. Кругом, которая подтвердила возможность качественной подготовки специалистов по электротехнике.

Чаще всего учебники по ТОЭ включали три крупные части:

- Физические основы электротехники.
- Теорию электрических цепей.
- Теорию электромагнитного поля.

Однако такая фундаментальная подготовка по электротехнике требовала значительного времени, отводимого на изучение дисциплины. В ряде вузов объем этой дисциплины составлял 400 часов и более. С другой стороны, развитие смежных с электротехникой областей науки и техники — радиотехники, теории электрической связи,

* Круг Карл Адольфович (1873–1952) — известный отечественный электротехник. Окончил Московское высшее техническое училище (МВТУ) в 1898 г. и Московский университет в 1903 г. С 1905 г. работал в МВТУ, где создал первую в России электротехническую школу. Участвовал в составлении плана ГОЭЛРО, в создании Московского энергетического института (МЭИ) и Всесоюзного электротехнического института (ВЭИ), директором которого был с 1921 по 1930 гг. Был членом Госплана СССР.

Известен фундаментальными работами по теоретической электротехнике и преобразованию постоянного тока в переменный. Написанный им учебник [1] переиздавался шесть раз. Награжден двумя орденами Ленина и другими знаками отличия.

электроники, импульсной техники, электродинамики и некоторых других привел к необходимости сокращения времени на изучение курса ТОЭ.

Прежде всего из курса ТОЭ начали исключать его первую часть — физические основы электротехники, так как предполагалось, что этот раздел достаточно глубоко рассматривается в курсе физики. Затем сокращению подверглась третья часть курса — теория электромагнитного поля. Это сокращение было связано с тем, что в ряде вузов появились специальные курсы по расчету электростатических полей или по электродинамике, потребность в которых диктовалась практической необходимостью. В результате этих преобразований в курсе ТОЭ осталась только его третья часть — теория электрических цепей.

С другой стороны, в курс ТОЭ были включены новые вопросы, которые ранее в него не входили: теория активных электрических фильтров, основы преобразователей иммитанса, применение вычислительной техники при анализе и синтезе электрических цепей. Появились и новые методы анализа электрических цепей, которые ранее не рассматривались.

При написании этой книги автор исходил из того, что при ограниченном объеме времени, отводимого на изучение дисциплины, очень важным является тщательный отбор материала, который необходим для изучения большинства смежных дисциплин, использующих этот курс. Каждая лекция написана так, что ее изучение может быть сокращено за счет исключения второстепенного материала. Для полного же изучения материала любой лекции необходимо не менее 4 часов.

Весь курс ТОЭ автор разделил на 10 разделов, каждый из которых включает от двух до семи лекций. Всего же курс содержит 33 лекции, поэтому при полном изучении дисциплины потребуется время, кратное 36 часам. Однако при недостатке времени, отводимого на изучение дисциплины, некоторые лекции можно исключить без большого ущерба для общей подготовки.

Так, например, можно исключить лекцию 24 по использованию сигнальных направленных графов для расчета электрических цепей или лекцию 12 по активным преобразователям сопротивлений и проводимостей. Можно значительно сократить лекцию 28 по активным электрическим фильтрам, частично или полностью исключить разделы 7 или 10. Иначе говоря, отбор материала для изучения предоставляется преподавателю, который читает эту дисциплину.

В основу этого учебника положена книга «Электротехника и основы электроники» [11], которая была написана автором совместно с проф. Т. А. Глазенко. В процессе доработки этой книги автор ввел в нее новые разделы, пересмотрел и тщательно отобрал материал для каждой лекции. Многие разделы написаны заново. С другой стороны, некоторые разделы выпущенной ранее книги [11] были исключены, так как их изучение требует значительного времени в ущерб другим разделам, в связи с чем изменено и название книги.

Все замечания и предложения, которые могут способствовать улучшению книги, просим направлять по адресу: 198005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29, Издательство «КОРОНА принт».

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая вниманию читателей книга по теоретическим основам электротехники в основном соответствует программе курса ТОЭ, которая утверждена учебно-методической комиссией Министерства образования Российской Федерации. В книгу включены преимущественно те вопросы, которые необходимы при изучении многих смежных с электротехникой дисциплин или необходимы для практической деятельности будущих специалистов. Поскольку учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся как в вузах, так и в колледжах, то при изучении большинства разделов курса не требуется углубленного знания высшей математики. При этом основное внимание уделено процессам, которые происходят в различных электротехнических устройствах и рассматриваются проблемы их анализа и расчета.

Во многом на отбор материала повлияло целевое назначение книги как учебника по теоретической электротехнике для специалистов по современному приборостроению, информатике, оптоэлектронике, вычислительной технике и другим отраслям науки, где используются электронно-электротехнические устройства для целей усиления и преобразования электрических сигналов. Обычно эти устройства работают в широком диапазоне амплитуд и частот сигналов достаточно сложной формы, поэтому в книгу включены разделы, посвященные обработке таких сигналов электрическими методами. Все это обусловило необходимость по-иному подходить к изучению теоретических основ электротехники.

В первом разделе курса приводится краткое рассмотрение физических основ электротехники. Рассматривается связь фундаментальных уравнений Максвелла с проблемами современной теории электрических цепей, вводится понятие полного электрического тока, который протекает в различных электрических средах — проводниках, диэлектриках или полупроводниках. Рассматриваются особенности электрических цепей и способы их классификации в зависимости от назначения и способа анализа или расчета.

Во втором разделе курса рассматриваются проблемы математического описания различных электрических воздействий и сигналов. При этом основное внимание уделено математическому моделированию и физическому представлению как периодических, так и непериодических сигналов достаточно сложной формы, которые могут рассматриваться как типовые сигналы различных электротехнических и электронных устройств, используемых в приборостроении.

В третьем разделе курса рассматриваются различные элементы, используемые в электрических и электронных устройствах. При этом кроме традиционных пассивных элементов, рассматриваются простейшие активные элементы, широко используемые в электронике и вычислительной технике: транзисторы, операционные усилители, преобразователи сопротивлений и проводимостей.

Четвертый раздел курса полностью посвящен анализу линейных электрических цепей, определению их характеристик и практическому использованию в стационарном режиме при гармонических и негармонических периодических воздействиях. В отличие от существующих учебников, более подробно рассматриваются возможности анализа цепей по мгновенным значениям.

Приводятся сведения о резонансных явлениях в цепях при синусоидальном и несинусоидальном токах. Отдельная лекция посвящена расчету мощности и энергии в линейных цепях при гармонических и негармонических токах и напряжениях.

Пятый раздел книги посвящен рассмотрению способов анализа линейных электрических цепей в нестационарных (переходных) режимах. Приводятся основные положения и примеры расчета переходных процессов по мгновенным (классический метод) и комплексным (операторный метод) значениям.

В шестом разделе книги рассматриваются различные способы расчета сложных электрических цепей. Поскольку при расчете сложных цепей в основном применяются матрично-топологические методы расчета, то в отдельной лекции этого раздела рассматриваются особенности составления топологических матриц и их применение при расчете сложных цепей. Кроме этого, даются краткие сведения и приводятся примеры расчета сложных цепей с помощью сигнальных направленных графов.

Поскольку изучение материала этого раздела предполагает знакомство читателей с матричной алгеброй, которая в ряде учебных заведений не читается, то этот раздел можно частично или полностью исключить из рассмотрения.

В седьмом разделе книги приводятся краткие сведения о назначении и применении трехфазных электрических цепей. Этот раздел представляет существенный интерес для специалистов по энергетике, но значительно меньший интерес для приборостроителей. В связи с этим он представлен в книге только двумя лекциями, в которых кратко рассматриваются особенности работы трехфазных цепей при соединении звездой и треугольником.

Восьмой раздел книги посвящен рассмотрению электрических фильтров. Однако в этом разделе приводятся сведения не только о традиционных пассивных фильтрах, но и рассматриваются некоторые простейшие типы активных фильтров. В связи с широким применением активных фильтров в различных оптико-электронных устройствах приводятся примеры их практического расчета.

В девятом разделе книги рассматриваются особенности работы линейных электрических цепей с распределенными параметрами. В сжатой форме при-

водятся сведения об особенностях работы цепей с распределенными параметрами при различных типах нагрузки. Этот раздел представляет существенный интерес не только для приборостроительных специальностей, но и конструкторов современной быстродействующей компьютерной аппаратуры.

В десятом разделе книги в краткой форме приводятся сведения об основных особенностях, применении и некоторых методах расчета нелинейных электрических цепей в стационарном режиме работы.

Следует обратить особое внимание читателей на некоторые особенности данной книги.

- Изучение методов расчета электрических цепей ведется в общем виде без деления их на пассивные и активные.

- В самом начале книги (во втором разделе) вводятся математические описания различных воздействий, которые позволяют в дальнейшем изучать процессы в электрических цепях.

- При анализе цепей, содержащих только линейные элементы, используются линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

- При анализе цепей с параметрическими элементами используются линейные уравнения с переменными коэффициентами.

- При изучении цепей, содержащих нелинейные элементы, формируются нелинейные уравнения, решение которых оказывается возможным только для частных случаев. В связи с тем, что при анализе цепей с нелинейными элементами неприменим принцип наложения, затрудняется решение большинства практически важных задач. Поэтому в разделе 10 приводятся примеры решения некоторых практически важных задач, без обобщения их на другие не менее важные случаи. В книге практически не используются методы аппроксимации характеристик нелинейных элементов, кроме применения степенных полиномов. При этом учитывается минимальное число членов степенного полинома, достаточное только для качественного отображения основных свойств исследуемого процесса.

- Для лучшего усвоения теоретического материала используются практически важные примеры.

- В конце книги приводятся контрольные вопросы для самопроверки усвоения теоретического материала.

Внесенные изменения позволили изложить довольно большой материал дисциплины в сравнительно малом объеме учебника. Некоторые вопросы изложены весьма кратко. Поэтому автор хочет пожелать читателям воспользоваться рекомендациями Д. И. Писарева: «Кто дорожит жизнью мысли, тот хорошо

знает, что настоящее образование есть только самообразование и что оно начинается только с той минуты, когда человек, распростившись навсегда со всеми школами, делается полным хозяином своего времени и своих знаний. Университет только в том отношении лучше других школ, что он представляет учащемуся гораздо больше самостоятельности. Но если Вы, окончив курс в университете, отложите всякое попечение о вашем дальнейшем образовании, то вы по гроб жизни останетесь очень необразованным человеком».

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Лекция 1. Уравнения электромагнитного поля и способы описания электромагнитных явлений. Понятие об электрическом токе

Разнообразные электротехнические и электронные устройства представляют собой системы заряженных тел и контуров с токами, взаимодействующие друг с другом. Электромагнитные явления, происходящие в таких системах, определяются как процессами в заряженных телах и проводящих контурах с токами, так и физическими процессами в окружающих средах, в которых распространяется электромагнитное поле, характеризуемое векторами электрической \mathbf{E} и магнитной \mathbf{H} напряженностей.

Процессы в электромагнитных полях описывают в макроскопическом понимании уравнениями Максвелла, представляющими собой обобщение законов Ампера, Фарадея и Гаусса и изучаемыми в курсе физики. Сводка уравнений Максвелла в интегральной форме, известных из курса физики, приведена в табл. 1.1.

Таблица 1.1.

Уравнения Максвелла

Интегральная форма уравнения Максвелла	Физическая интерпретация
$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{j} d\mathbf{S}$	Вихревое магнитное поле возбуждается изменяющимся во времени электрическим полем, токами проводимости и переноса, а также токами от сторонних источников
$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$	Изменяющееся во времени магнитное поле возбуждает вихревое электрическое поле
$\oint_s \mathbf{D} d\mathbf{S} = q$	Источники электрического поля расположены в местах нахождения электрических зарядов. Статическое электрическое поле возбуждается неизменными во времени зарядами
$\oint_s \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$	Магнитное поле всегда является вихревым, а его силовые линии всегда замкнуты. Магнитное поле не имеет источников силовых линий

Электромагнитное поле является носителем энергии, которая для некоторого объема V имеет значение

$$W_{\text{эм}} = \int_V \frac{\epsilon_r E^2}{2} dV + \int_V \frac{\mu_r H^2}{2} dV, \quad (1.1)$$

где $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$, $\mu_r = \mu/\mu_0$ — абсолютные электрическая и магнитная проницаемости среды;

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$ — электрическая и магнитная проницаемости вакуума;

$\epsilon = \epsilon_r/\epsilon_0$, $\mu = \mu_r/\mu_0$ — относительные электрическая и магнитная проницаемости среды.

Электромагнитные волны перемещаются в вакууме со скоростью $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = 2,999 \cdot 10^8 \text{ м/с}$, а в среде — со скоростью $v = c(\mu\epsilon)^{-1/2}$. Отношение скоростей электромагнитных волн в вакууме и среде $n = c/v = (\mu\epsilon)^{1/2}$ называют показателем преломления среды.

В общем случае электромагнитные свойства среды учитывают в уравнениях Максвелла определяемыми из опыта значениями удельной объемной проводимости γ , электрической ϵ и магнитной μ проницаемостей в соответствии с уравнениями: $\mathbf{j}_{\text{пр}} = \gamma \mathbf{E}$, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, где $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ — плотность электрического тока проводимости; \mathbf{D} — вектор индукции электрического поля; \mathbf{B} — вектор индукции магнитного поля.

Первое уравнение Максвелла устанавливает связь между магнитным полем и его источником — плотностью \mathbf{j} электрического тока. Магнитное поле является вихревым и характеризуется векторами \mathbf{H} или \mathbf{B} , которые имеют замкнутые силовые линии. Оно может возбуждаться как движущимися зарядами, образующими плотности токов $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ проводимости и $\mathbf{j}_{\text{пер}}$ переноса, так и изменяющимся во времени электрическим полем, вызывающим появление плотности $\mathbf{j}_{\text{см}}$ тока смещения.

Ток проводимости $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ представляет собой упорядоченное движение зарядов: электронов в металле или ионов в электролите. Он определяется потоком вектора плотности тока $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ через поперечное сечение \mathbf{S} проводника и численно равен отношению количества электричества Δq , переносимого заряженными частицами, к некоторому промежутку времени Δt , стремящемуся к нулю:

$$i_{\text{пр}} = \int_S \mathbf{j}_{\text{пр}} d\mathbf{S} = dq/dt. \quad (1.2)$$

Ток переноса $\mathbf{j}_{\text{пер}}$ возникает под действием электрического поля \mathbf{E} в свободном пространстве, заполненном зарядами со среднеобъемной плотностью ρ , движущимися со скоростью \mathbf{v} :

$$i_{\text{пер}} = \int_S \mathbf{j}_{\text{пер}} d\mathbf{S}, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{j}_{\text{пер}} = \rho \mathbf{v}$ — плотность тока переноса.

Ток электрического смещения $i_{\text{см}}$ возникает в диэлектриках (или в вакууме) и связан с переменным электрическим полем:

$$i_{\text{см}} = \int_S \mathbf{j}_{\text{см}} d\mathbf{S}, \quad (1.4)$$

где $\mathbf{j}_{\text{см}} = d\mathbf{D}/dt$ — плотность тока смещения.

Токи проводимости и переноса могут возникать как в постоянных, так и в переменных электрических полях. Ток смещения присутствует только в переменных полях. Это означает, что в переменных полях линии вектора плотности тока проводимости могут иметь продолжением линии вектора плотности тока смещения.

Плотность полного электрического тока \mathbf{j} определяют суммой его составляющих: $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{пр}} + \mathbf{j}_{\text{пер}} + \mathbf{j}_{\text{см}}$, поэтому результирующий ток через поверхность S

$$i = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (1.5)$$

Очевидно, что полный электрический ток представляет собой два разнородных явления: движение электрических зарядов и изменение электрического поля во времени. Поэтому полный электрический ток представляет собой совокупность явлений, при которых образуется магнитное поле. Причем токи смещения преобладают в диэлектриках, токи проводимости — в проводниках, а в полупроводниках нужно учитывать все составляющие полного тока.

В качестве примера на рис. 1.1 показана электрическая схема, в которой присутствуют все виды рассмотренных выше токов. Ток, создаваемый источником переменного напряжения, проходит по проводникам, которые соединяют последовательно включенные электровакуумный диод и конденсатор. При этом ток в проводниках обеспечивается перемещением свободных электронов и, следовательно, является током проводимости $i_{\text{пр}}$.

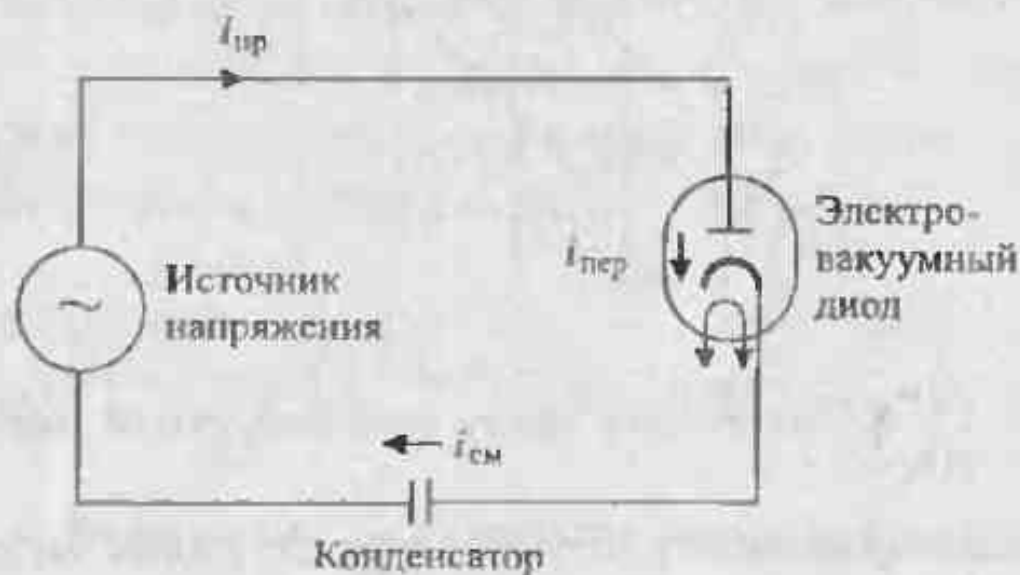


Рис. 1.1. Иллюстрация к понятию полного тока

Ток в электровакуумном диоде обеспечивается электронами, создаваемыми термоэлектронной эмиссией катода диода. Эти электроны перемещаются в вакуумной колбе диода и создают ток переноса $i_{\text{пер}}$.

Ток в конденсаторе является током смещения $i_{\text{см}}$, так как он обусловлен переменным электрическим полем между обкладками конденсатора.

Второе уравнение Максвелла устанавливает связь между электрическим полем и возбуждающим его переменным магнитным полем. Оно является обобщением закона электромагнитной индукции Фарадея, согласно которому индуктированная эдс

$$e = -d\Psi / dt, \quad (1.6)$$

где $\Psi = w\Phi$ — магнитное потокоцепление;

w — число витков, сцепленных с потоком Φ ;

$\Phi = \int \mathbf{B}d\mathbf{S}$ — поток вектора магнитной индукции через поверхность S .

В качестве примера применения закона электромагнитной индукции рассмотрим устройство простейшего генератора. На рис. 1.2 показано устройство такого генератора, состоящего из проводящей рамки, которая вращается в магнитном поле. Поскольку при вращении рамки изменяется магнитный поток, проходящий через ее поверхность, то на ее зажимах создается эдс e , зависящая от площади рамки S магнитной индукции \mathbf{B} и угловой скорости вращения рамки ω .

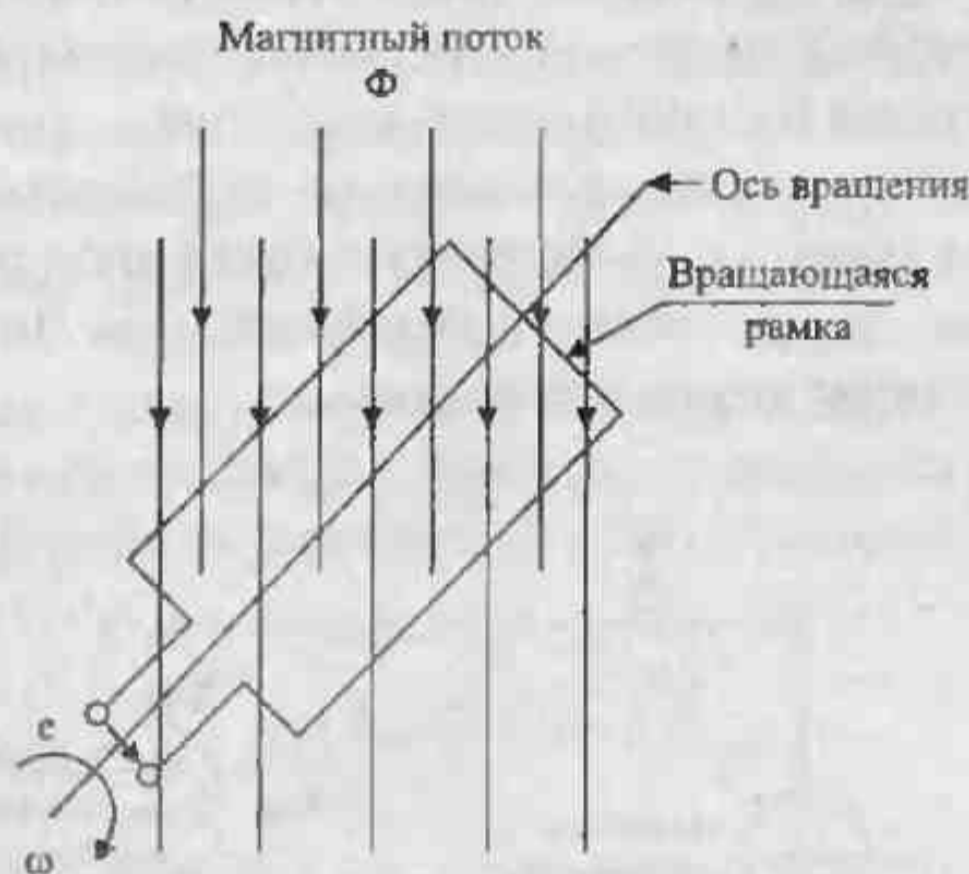


Рис. 1.2. Иллюстрация к закону электромагнитной индукции

Третье уравнение Максвелла устанавливает связь между потоком вектора электрической индукции \mathbf{D} через замкнутую поверхность S и суммарным зарядом q , заключенным в объеме V , ограниченном поверхностью S . Это уравнение является обобщением закона Гаусса

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q, \quad (1.7)$$

утверждающего, что источники электрического поля расположены в местах, в которых есть заряды.

Таким образом, силовые линии электрического поля могут начинаться и кончаться на зарядах q , как показано на рис. 1.3а. Однако, в переменном электромагнитном поле при отсутствии зарядов электрическое поле может создаваться переменным магнитным полем. В этом случае его силовые линии образуют замкнутые контуры, как показано на рис. 1.3б. При отсутствии зарядов q выполняется условие $\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = 0$.

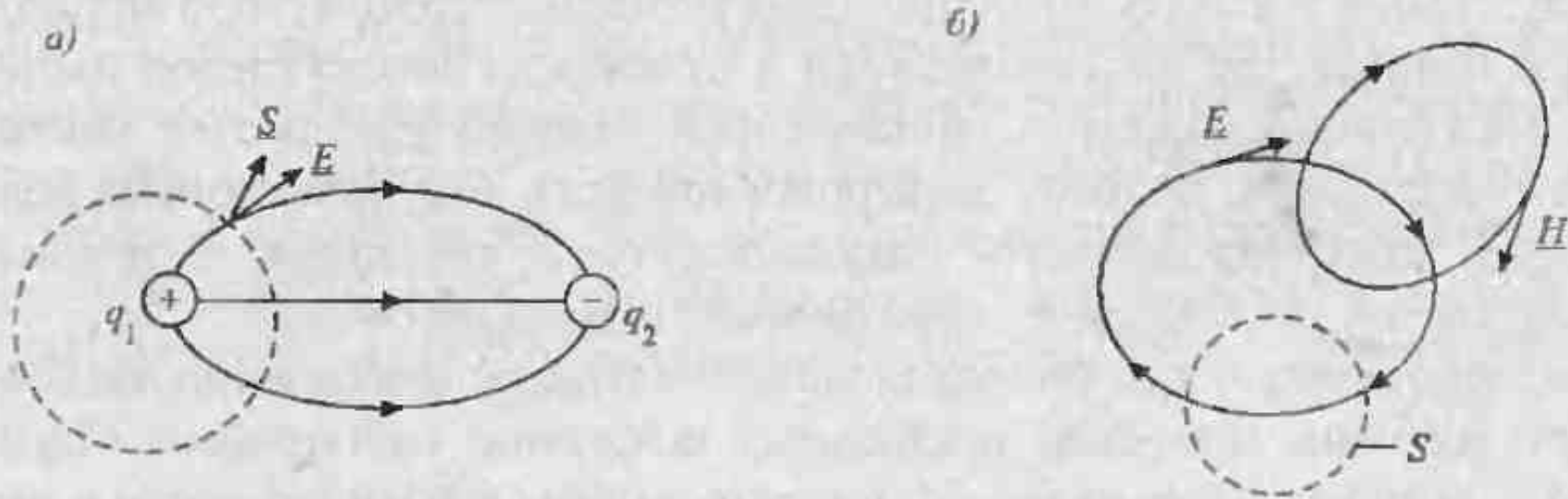


Рис. 1.3. Иллюстрация к закону Гаусса: (а) при наличии зарядов, (б) без зарядов

Четвертое уравнение Максвелла устанавливает соленоидальность магнитного поля. Оно утверждает, что вектор индукции магнитного поля \mathbf{B} не имеет источников, а его силовые линии всегда замкнутые, как показано на рис. 1.3б.

Из уравнений Максвелла вытекает принцип непрерывности электрического тока, согласно которому изменение заряда внутри некоторой поверхности может происходить за счет токов проводимости и переноса:

$$dq/dt = -i_{\text{пр}} - i_{\text{пер}}. \quad (1.8)$$

С учетом третьего уравнения Максвелла принцип непрерывности можно представить в виде $\sum i = i_{\text{см}} + i_{\text{пр}} + i_{\text{пер}} = 0$ или $\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0$.

Таким образом, поток вектора плотности полного тока через любую замкнутую поверхность S всегда равен нулю. Полный электрический ток, проходящий через замкнутую поверхность в любой среде, равен нулю, а линии вектора плотности полного тока \mathbf{j} всегда являются замкнутыми. Принцип непрерывности тока показывает, что постоянные токи могут протекать только в замкнутых цепях. В переменных полях линии вектора $\mathbf{j}_{пр}$ могут быть незамкнутыми и иметь продолжением линии вектора $\mathbf{j}_{ем}$. В местах, где заканчиваются линии вектора плотности тока проводимости, могут накапливаться заряды. Таким образом, плотность тока проводимости может иметь источники и стоки в виде изменяющихся во времени зарядов.

Особенности электропроводности полупроводников. Химически чистые *полупроводники* при температуре абсолютного нуля ведут себя так же, как диэлектрики, и их электропроводность при постоянном токе равна нулю. Однако с повышением температуры тепловые колебания атомов полупроводников приводят к увеличению энергии валентных электронов, которые могут оторваться от атомов и начать свободное перемещение. Поэтому при нормальной комнатной температуре полупроводники в отличие от диэлектриков имеют некоторую электропроводность. С повышением температуры растет число оторвавшихся электронов, поэтому электропроводность полупроводников повышается. Такую электропроводность полупроводников, связанную с нарушением валентных связей, называют их *собственной проводимостью*.

На электропроводность полупроводников большое влияние оказывают *примеси*. При наличии примесей происходит появление избыточных валентных электронов, которые легко освобождаются от атомов и превращаются в свободные заряды. Следует отметить, что содержание примесей может быть весьма незначительным, однако повышение электропроводности при этом может быть весьма существенным. Так, например, для германия наличие всего 0,001% примесей приводит к увеличению электропроводности в 10^4 раз.

Электропроводность полупроводников, обусловленную наличием примесей, называют его *примесной проводимостью*. Примесная проводимость полупроводников может во много раз превышать их собственную проводимость.

В соответствии с *зонной теорией* твердого тела электроны, связанные с изолированным атомом, могут иметь только определенные дискретные уровни энергии и, следовательно, могут занимать только дискретные орбиты, между которыми располагаются зоны запрещенных энергий.

В запрещенные зоны входят такие уровни энергий, которые электроны принимать не могут. *Шириной запрещенной зоны* называется уровень энергии ΔW между двумя соседними разрешенными зонами.

На рис. 1.4. приведена энергетическая диаграмма полупроводника, в которой последняя разрешенная полностью занятая зона называется валентной, а первая разрешенная свободная зона называется зоной проводимости. Между этими двумя разрешенными зонами располагается запрещенная зона с шириной ΔW .

Внутри разрешенных зон энергетические уровни располагаются так близко, что можно считать их практически непрерывными. Это позволяет вместо линейчатого энергетического спектра электронов атома рассматривать спектр энергетических зон, в котором чередуются разрешенные и запрещенные зоны ΔW .

При этом электрон может перейти из валентной зоны в зону проводимости, если он получит дополнительную энергию, превышающую ширину запрещенной зоны.

По значениям ширины запрещенной зоны все вещества также можно разделить на диэлектрики, полупроводники и проводники. Если ширина запрещенной зоны больше 3 эВ, то вещество относится к диэлектрикам. Если ширина запрещенной зоны меньше 3 эВ, то вещество считается полупроводником. У проводников запрещенная зона отсутствует совсем.

Среди различных полупроводников в электронной технике наиболее широкое применение нашли три вещества: германий, кремний и арсенид галлия. Их основные свойства приведены в табл. 1.2. Из этой таблицы следует, что наименьшее значение ширины запрещенной зоны имеет германий, а наибольшее значение — арсенид галлия. Кремний занимает промежуточное положение.

Применение германия ограничено малой шириной запрещенной зоны, что приводит к большому току утечки при повышении температуры. Наиболее широкое распространение в полупроводниковой электронике получил кремний, который имеет умеренно широкую запрещенную зону и высокую температуру плавления. Самую широкую запрещенную зону имеет арсенид

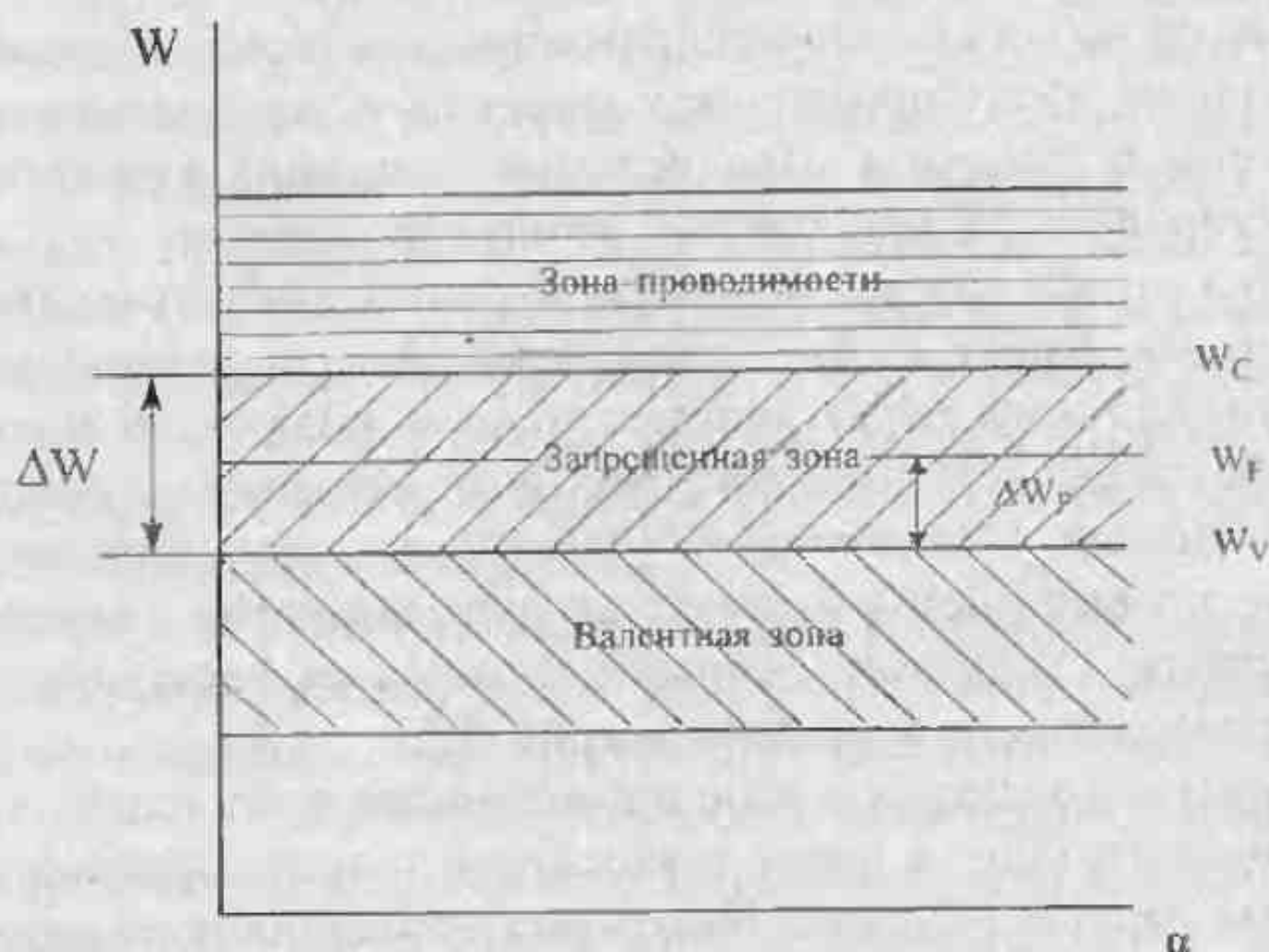


Рис. 1.4. Зонная диаграмма полупроводника с собственной электропроводностью

Свойства полупроводниковых материалов

Материал полупроводника	Ge	Si	GaAs
Ширина запрещенной зоны, эВ	0,66	1,11	1,42
Концентрация собственных носителей, см ⁻³	$2,4 \cdot 10^{13}$	$1,4 \cdot 10^{16}$	$1,8 \cdot 10^6$
Подвижность дрейфа, см ² /В.с			
электронов	3900	1400	1500
дырок	1900	450	400
Время жизни неосновных носителей, с	10^{-7}	$2,5 \cdot 10^{-7}$	10^{-8}
Теплопроводность, Вт/Ксм	0,6	1,45	0,46
Температура плавления, °С	937	1415	1238

галлия. Он также имеет высокую подвижность носителей зарядов и высокую температуру плавления. Главным недостатком арсенида галлия является малое время жизни неосновных носителей зарядов.

Германий и кремний относятся к элементам четвертой группы периодической системы элементов Д. И. Менделеева. Атомы этих элементов имеют по четыре валентных электрона. Арсенид галлия GaAs состоит из соединения элементов третьей группы Ga и пятой группы As. Так как атомы третьей группы имеют три валентных электрона, а атомы пятой группы — пять, то среднее число валентных электронов у этого соединения тоже четыре.

В отличие от металлов, электропроводность которых обусловлена свободными электронами, в полупроводниках может быть два типа электропроводности: электронная и дырочная. При переходе электрона в зону проводимости кристалл полупроводника приобретает электропроводность.

Однако при этом в валентной зоне появляются свободные уровни, которые называют дырками. Дырки имеют положительный заряд и также могут участвовать в образовании тока через кристалл. Таким образом, в полупроводниках могут иметь место два типа электропроводности, связанные с различными типами носителей зарядов: электронная (обусловленная движением свободных электронов в зоне проводимости) и дырочная (обусловленная движением дырок в валентной области). Условное изображение перехода электрона из валентной зоны в зону проводимости приведено на рис. 1.5.

На этом рисунке электрон в зоне проводимости представлен в виде кружка с отрицательным зарядом, а дырка в валентной зоне изображена как кружок с положительным зарядом. Стрелка показывает направление перехода электрона.

Если образование парных свободных носителей зарядов произошло из-за нарушения валентных связей, то электропроводность кристалла остается соб-



Рис. 1.5. Переход электрона из валентной зоны в зону проводимости

ственной. Однако положение кардинально меняется, если в структуру полупроводника вводятся примеси.

Если в основной четырехвалентный полупроводник (Ge или Si) ввести пятивалентную примесь, например фосфор P или сурьму Sb, то четыре электрона атома примеси оказываются связанными с четырьмя валентными электронами основного полупроводника. Однако пятый валентный электрон примеси является избыточным. Он легко переходит в зону проводимости и участвует в создании электронной проводимости кристалла. Примеси, отдающие свои электроны в зону проводимости основного полупроводника, называют *донорами*.

Аналогично если в основной четырехвалентный полупроводник ввести трехвалентную примесь, например галлий Ga или индий In, то только три электрона атома примеси связываются с тремя валентными электронами основного полупроводника. Недостающий четвертый электрон для основного полупроводника заимствуется из валентной зоны, в которой при этом образуется дырка, имеющая положительный заряд. Примеси, способные принимать на свои уровни валентные электроны, называют *акцепторами*.

Таким образом, с помощью доноров создаются полупроводники, в которых основными носителями зарядов служат электроны. Такие полупроводники называют *электронными* (или *n-типа*). Аналогично с помощью акцепторов создаются полупроводники, в которых основными носителями зарядов являются дырки. Такие полупроводники называют *дырочными* (или *p-типа*).

Для электронных полупроводников концентрации электронов n в зоне проводимости и дырок p в валентной зоне определяются согласно статистике Ферми–Дирака по формулам:

$$n = N_c \exp\left(\frac{W_F - W_C}{kT}\right) = N_c \exp\left(\frac{\Delta W_F - \Delta W}{kT}\right) \quad (1.9)$$

$$p = N_v \exp\left(\frac{W_V - W_F}{kT}\right) = N_v \exp\left(\frac{-\Delta W_F}{kT}\right) \quad (1.10)$$

где: N_c — эффективная концентрация электронов у дна зоны проводимости,
 N_v — эффективная концентрация дырок у потолка валентной зоны,
 W_F — уровень (энергия) Ферми,
 W_C — энергия дна зоны проводимости,
 W_V — энергия потолка валентной зоны,
 $\Delta W = W_C - W_V$ — ширина (энергия) запрещенной зоны,
 $\Delta W_F = W_F - W_V$ — энергия между уровнем Ферми и потолком валентной зоны.

Для химически чистых полупроводников уровень Ферми W_{Fi} располагается посередине запрещенной зоны $W_{Fi} = (W_C + W_V)/2$, а $N_c = N_v = N$, поэтому концентрации электронов и дырок равны и определяются по формуле:

$$n_i = p_i = N \exp(-\Delta W / 2kT)$$

Для электронных полупроводников уровень Ферми W_{Fn} смещается по направлению к дну зоны проводимости, а для дырочных полупроводников уровень Ферми W_{Fp} смещается в сторону потолка валентной зоны, как показано на рис. 1. 6.

Концентрации электронов и дырок в примесных полупроводниках можно выразить через концентрацию собственного полупроводника n_i и соответствующие уровни Ферми:

$$n = n_i \exp\left(\frac{W_F - W_{Fn}}{kT}\right), \quad (1.11)$$

$$p = n_i \exp\left(\frac{W_{Fp} - W_F}{kT}\right). \quad (1.12)$$

Из уравнений (1.11) и (1.12) следует, что произведение концентраций электронов n и дырок p в любом электрически нейтральном полупроводнике есть величина постоянная, не зависящая от характера и количества примесей

$$n \cdot p = n_i^2 \quad (1.13)$$

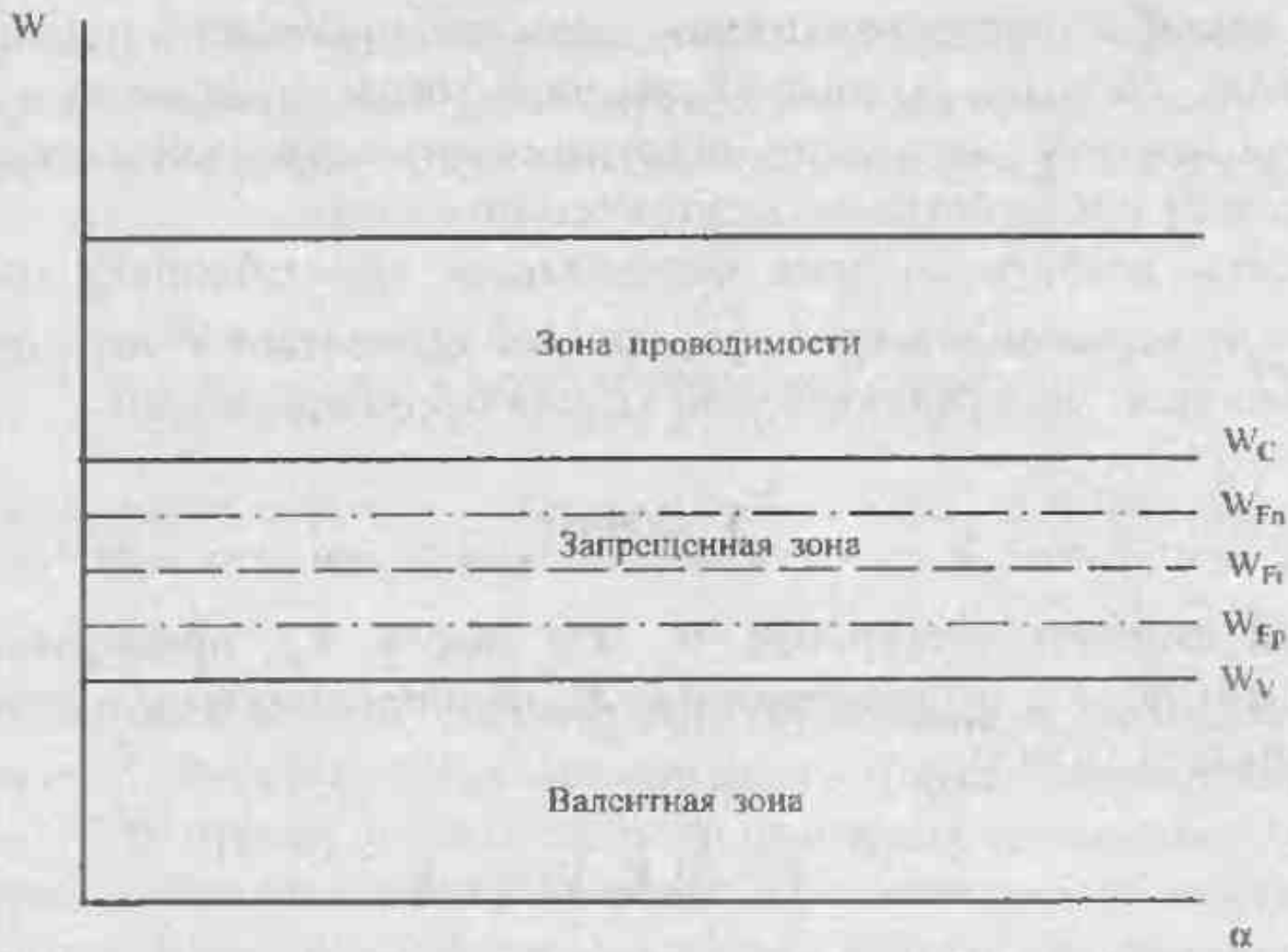


Рис. 1.6. Положение уровней Ферми в запрещенной зоне.

Этим свойством полупроводников обычно пользуются для создания полупроводников с электронной или с дырочной проводимостями.

Пример 1.1. Определим концентрации электронов и дырок в электрически нейтральном германии при введении в него донорной примеси с концентрацией $N_D = 10^{15} \text{ см}^{-3}$.

Решение. В химически чистом германии при комнатной температуре концентрации электронов и дырок имеют значения $n_i = p_i = 2,5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, т. е. в каждом кубическом сантиметре германия содержится $2,5 \cdot 10^{13}$ электронов и столько же дырок.

При введении в германий донорной примеси с концентрацией $N_D = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ равновесная концентрация электронов будет практически равна концентрации доноров, т. е. $n = N_D = 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Равновесную концентрацию дырок найдем по формуле (1.13):

$$p = n_i^2/n = 6,25 \cdot 10^{26}/10^{15} = 6,25 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}.$$

Таким образом, равновесная концентрация электронов при введении примеси увеличивается больше, чем на три порядка по сравнению с концентрацией дырок.

Если в полупроводнике содержатся равные количества донорных и акцепторных примесей, то такие примеси будут взаимно компенсировать друг друга. При этом концентрация носителей останется такой же, как в собственном полупроводнике, однако их подвижность будет понижена за счет большого количества примесей. Такие полупроводники называют *компенсированными*.

Компенсированные полупроводники также могут обладать электронной или дырочной проводимостью. Тип проводимости будет определяться преобладанием концентрации одного типа примесей над другим. Иначе говоря, одно и то же значение концентрации свободных носителей можно получить при различных соотношениях концентраций доноров и акцепторов. К недостаткам компенсированных полупроводников относится снижение подвижности носителей зарядов в них.

Виды токов в полупроводниках. Если полупроводник помещен в электрическое поле, то в нем возникают два вида токов: дрейфовый и диффузионный. Дрейфовый ток обусловлен перемещением носителей зарядов (электронов или дырок) под действием электрического поля.

Плотность дрейфового тока определяется концентрацией электронов n (или дырок p), зарядом электрона q и средней скоростью \bar{v} перемещения заряда в направлении, перпендикулярном сечению полупроводника:

$$\mathbf{j}_E = nq\bar{\mathbf{v}}. \quad (1.14)$$

Средняя скорость электронов \bar{v}_n или дырок \bar{v}_p , приобретаемая ими в электрическом поле с напряженностью \mathbf{E} , пропорциональна подвижности носителей заряда μ_n или μ_p

$$\bar{v}_n = \mu_n \mathbf{E}; \quad \bar{v}_p = \mu_p \mathbf{E}. \quad (1.15)$$

После подстановки значений (1.14) в формулу (1.15) получим значения плотностей тока дрейфа:

$$\mathbf{j}_n = nq\mu_n \mathbf{E} = g_n \mathbf{E}, \quad (1.16)$$

$$\mathbf{j}_p = pq\mu_p \mathbf{E} = g_p \mathbf{E}, \quad (1.17)$$

где: $g_n = nq\mu_n$ и $g_p = pq\mu_p$ — удельные электропроводности электронного и дырочного полупроводников соответственно.

Если электропроводность в полупроводнике обусловлена как электронами, так и дырками, то результирующая удельная электропроводность определяется их суммой:

$$g = g_n + g_p = q(n\mu_n + p\mu_p). \quad (1.18)$$

Подвижность носителей зарядов с ростом температуры будет падать, так как растет число столкновений частиц. Теоретически считают, что с изменением температуры подвижность изменяется по уравнению:

$$\mu = AT^{-3/2}, \quad (1.19)$$

где: A — некоторая константа, зависящая от материала полупроводника.

Вторая составляющая тока в полупроводнике называется диффузионным током. Диффузионный ток в полупроводнике возникает при нарушении термодинамического равновесия в результате освещения или облучения его потоком

заряженных частиц. При этом энергия облучения непосредственно передается носителям заряда, в результате чего они переходят в неравновесное состояние. Такое состояние носителей заряда может быть неравномерным по всему объему полупроводника.

Пример 1.2. При условиях примера 1.1 в полупроводнике за счет облучения создается дополнительная концентрация парных носителей заряда электрон-дырка, равная $n = 10^{11} \text{ см}^{-3}$. Требуется определить, как изменятся концентрации носителей в результате облучения.

Решение. Концентрация электронов в освещенной области возрастет с $N_D = 10^{13}$ еще на 10^{11} , т. е. всего на 1%. В то же время концентрация дырок изменится с $p = 6,25 \cdot 10^{11}$ до 10^{11} , т. е. более чем в 10 раз.

После окончания облучения концентрация неравновесных носителей постепенно убывает за счет объединения пар электрон-дырка. Такое объединение называется *рекомбинацией*. В результате рекомбинации концентрация избыточных носителей в полупроводнике быстро убывает и он переходит в равновесное состояние.

Перемещение дырок от места их появления в область с пониженной концентрацией носит название *диффузии*. Время существования неравновесных носителей называется их *временем жизни* τ . За время жизни в результате диффузии дырки будут проходить некоторое среднее расстояние, называемое *диффузионной длиной* L . При этом диффузионная длина определяется как расстояние, на котором концентрация неравновесных носителей снижается в e раз (т. е. в 1,73 раза). Диффузионная длина и время жизни связаны между собой уравнением

$$L = \sqrt{D\tau}, \quad (1.20)$$

где: $D = \mu kT/q$ — называется коэффициентом диффузии и имеет различное значение для электронов и дырок.

Плотность тока диффузии пропорциональна градиенту концентрации носителей ∇n , взятому с обратным знаком, коэффициенту диффузии носителей D и заряду электрона q :

$$j_D = -qD\nabla n \quad (1.21)$$

Для одномерного случая $\nabla n = dn/dx$ и, следовательно, плотность тока диффузии будет иметь значение:

$$j_D = -qD \frac{dn}{dx}. \quad (1.22)$$

Если в полупроводнике имеют место оба вида тока, то плотность полного тока равна их сумме:

$$j = j_E + j_D = nq\mu E - qD \frac{dn}{dx}. \quad (1.23)$$

Уравнение (1.23) позволяет определить полные плотности электронного и дырочного токов:

$$j_n = nq\mu_n E - qD_n \frac{dn}{dx}, \quad (1.24) \quad j_p = pq\mu_p E - qD_p \frac{dp}{dx}. \quad (1.25)$$

Диффузионный ток также возникает в месте контакта двух полупроводников с различным типом проводимости, например, в электронно-дырочных переходах, которые используются во многих полупроводниковых приборах. В таких переходах возникает неравномерное распределение концентрации носителей зарядов, что приводит к диффузии электронов из n -области в p -область и дырок из p -области в n -область. Плотность полного диффузионного тока через переход равна сумме диффузионных токов, определяемых по формулам (1.24) и (1.25)

$$j_w = j_{0n} + j_{0p} = q \left(D_n \frac{dn}{dx} + D_p \frac{dp}{dx} \right) \quad (1.26)$$

Диффузия электронов и дырок создает на переходе напряженность электрического поля $E = -dU/dx$, поэтому кроме диффузионного тока через переход будет также проходить дрейфовый ток, плотность которого определяется уравнениями (1.16) и (1.17).

Лекция 2. Основные понятия и законы электрической цепи

В общем случае расчет электромагнитных систем сводится к решению уравнений Максвелла для электромагнитного поля. Решение этих уравнений даже для сравнительно простых электромагнитных систем крайне сложно, поэтому во многих практических случаях, когда в системе можно выделить отдельно элементы, связанные только с одним видом поля (электрическим или магнитным), можно отказаться от исследования электромагнитного поля и решать задачу, рассматривая систему как электрическую цепь, которая в отличие от электромагнитной системы описывается не векторами поля E , D , H , B , а интегральными величинами — электрическим напряжением u , током i , зарядом q и магнитным потоком Φ .

Электрическое напряжение u представляет собой работу по перемещению заряда между определенными точками 1 и 2 пространства и определяется выражением

$$u_{12} = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} \quad (2.1)$$

Для потенциальных электромагнитных полей, работа в которых не зависит от формы пути, суммарная работа при обходе замкнутого контура равна нулю, поэтому сумма напряжений при обходе замкнутого контура также равна нулю:

$$\sum u_k = \sum_k \int \mathbf{E}_k d\mathbf{l}_k = 0 \quad (2.2)$$

Для напряжения, как и для тока, положительное направление может быть выбрано произвольно, однако для большинства случаев его принимают совпадающим с положительным направлением тока. Напряжение и ток на участке проводника связаны между собой законом Ома:

$$u_k = r_k i_k = i_k / g_k, \quad (2.3)$$

где $r_k = 1/g_k$ — сопротивление проводника; g_k — его проводимость.

Если под действием напряжения u в проводнике перемещается заряд dq , то при этом затрачивается энергия

$$dW = u dq = u i dt.$$

Работа, производимая электрическим током за некоторый интервал времени t_1 — t_2 :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} u i dt = \int_{t_1}^{t_2} p dt,$$

где $p = \frac{dW}{dt} = u \frac{dq}{dt} = u i$ — мощность электрического тока.

Для учета процессов преобразования электрической энергии в цепях вводят *идеализированные элементы*, процессы в которых связаны лишь с одним видом энергии поля. С энергией электрического поля связан идеализированный *конденсатор*, характеризуемый *емкостью* $C = q/u$, а с энергией магнитного поля — идеализированная *катушка*, характеризуемая *индуктивностью* $L = w\Phi/i$. Преобразование энергии электромагнитного поля в любой другой вид энергии учитывается введением идеализированного *резистора*, характеризуемого *сопротивлением* r .

Для учета преобразования энергии неэлектрической природы в электрическую вводят идеализированные элементы — *источник напряжения* и *источник тока*. Напряжение e идеализированного источника напряжения не зависит от тока в нем, а ток j идеализированного источника тока не зависит от напряжения на его зажимах. Основные характеристики простейших элементов электрической цепи и их расчетные соотношения приведены в табл. 2.1.


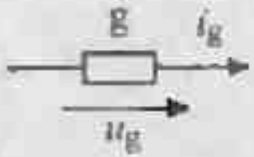
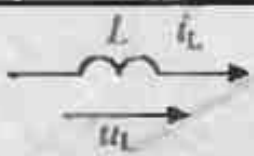
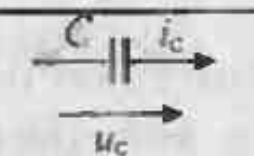

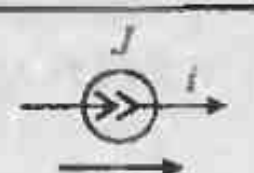
При расчете электрических цепей определяют токи и напряжения на зажимах этих идеализированных элементов. Соединяя между собой элементы, получают *электрическую цепь*, которая приближенно отображает электромагнитные процессы в системе по отношению к определенным зажимам. Таким образом, электрическую цепь можно рассматривать как совокупность объектов и устройств, предназначенных для прохождения электрического тока. Процессы в цепи характеризуются понятиями напряжения и тока.

Такое приближение справедливо, если не учитываются волновые процессы в окружающем пространстве. Поскольку скорость распространения электро-

магнитных волн конечна (в пустоте $c = 3 \cdot 10^8$ м/с), то время распространения электромагнитных колебаний в системе иногда необходимо учитывать. Однако, если это время мало по сравнению с периодом колебаний, то физические размеры электротехнических устройств можно не учитывать.

Таблица 2.1

Основные характеристики идеализированных элементов

Элемент	Условное обозначение	Напряжение на элементе	Ток в элементе	Мощность или энергия в элементе
Сопротивление		$u_r = i_r r$	$i_r = \frac{u_r}{r}$	$P_r = r i_r^2 = \frac{u_r^2}{r}$
Проводимость		$u_g = \frac{i_g}{g}$	$i_g = u_g g$	$P_g = g u_g^2 = \frac{i_g^2}{g}$
Индуктивность		$u_L = L \frac{di_L}{dt}$	$i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt$	$W_L = \frac{L i_L^2}{2}$
Емкость		$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$	$i_C = C \frac{du_C}{dt}$	$W_C = \frac{C u_C^2}{2}$
Источник напряжения		$e = -u$	i — любое значение	$P_e = e i$
Источник тока		u — любое значение	$i = J$	$P_J = u J$

Последнее обстоятельство приводит к необходимости ограничения физических размеров электротехнических устройств по сравнению с длиной волны, соответствующей нормальному рабочему процессу в них. Так, в электрической цепи ультразвуковой частоты при $f = 25$ кГц соответствующая длина волны

$$\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 / (25 \cdot 10^3) = 12\ 000 \text{ м,}$$

и электрическая цепь размерами в десятки метров может рассматриваться как цепь с сосредоточенными параметрами.

В то же время, например, в быстродействующих ЭВМ при сигналах с частотой 500 МГц длина волны $\lambda = 0,6$ м, и анализ процессов в цепи с геометрическими размерами всего в несколько сантиметров должен вестись с позиции электромагнитного поля или с позиции цепей с распределенными парамет-

рами, при которых учитывается изменение напряжения и тока в зависимости от пространственной координаты.

Элементы электрической цепи можно классифицировать по ряду признаков: числу полюсов, соотношениям воздействия и реакции, виду характеристик, потреблению энергии и др.

В зависимости от числа *полюсов* (входных зажимов), относительно которых интересуются процессами в цепи, различают двухполюсные, четырехполюсные и многополюсные элементы.

К *двухполюсным* элементам относят неуправляемые источники энергии, резисторы, катушки и конденсаторы, а также некоторые электронные и полупроводниковые приборы — диоды, диристоры и др.

К *четырёхполюсным* элементам относят большинство электронных приборов, электромеханических и электромагнитных устройств, таких, как униполярные и биполярные транзисторы, электровакуумные триоды, усилители напряжения и тока, управляемые источники напряжения и тока, трансформаторы и др.

К *многополюсным* элементам относят многосеточные электронные лампы, полупроводниковые тетроды, дифференциальные операционные усилители и различные интегральные полупроводниковые приборы.

Свойства электрических цепей и их элементов принято оценивать соотношением *воздействия* $x(t)$ и *реакции* $y(t)$, т. е. причины и следствия (рис. 2.1). В зависимости от вида уравнения, связывающего воздействие и реакцию, элементы подразделяют на инерционные и безынерционные, линейные и нелинейные, управляемые и неуправляемые, обратимые и необратимые, стационарные и нестационарные.

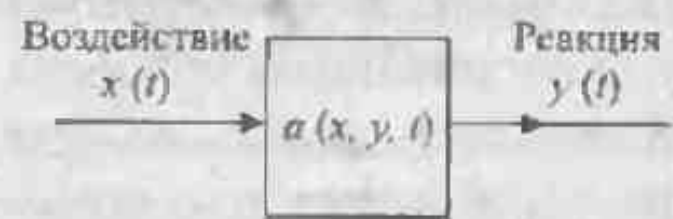


Рис. 2.1. Воздействие и реакция в электрической цепи

К *безынерционным* относят элементы, для которых воздействие и реакция связаны алгебраическими уравнениями, например резисторы. К *инерционным* — элементы, для которых воздействие и реакция связаны интегродифференциальными уравнениями, например индуктивности и емкости. Для таких элементов изменение реакции $y(t)$ во времени отличается от временной зависимости воздействия $x(t)$. Реакция инерционных элементов связана с изменением запаса энергии электромагнитного поля, и для ее определения в некоторый момент времени t необходимо знать не только текущее значение воздействия, но и всю предысторию, т. е. значение $x(t)$ на временном интервале от $-\infty$ до t_0 , или располагать сведениями о запасах энергии $W_L(t_0)$ и $W_C(t_0)$ к моменту начала ($t = t_0$) интересующего нас процесса.

Воздействия и реакции математически описываются величинами, которые называют *переменными*, и являются функциями времени. Связь между реакцией y_k k -го элемента и приложенным воздействием x_k для безынерционного элемента определяется уравнением

$$y_k = a_k x_k, \quad (2.5)$$

где a_k — коэффициент пропорциональности, называемый *параметром* k -го элемента.

Если параметр a_k является постоянным, то реакция пропорциональна воздействию и элемент называют *линейным*. Если же параметр a зависит от значения воздействия или реакции, то такой элемент называют *нелинейным*. Цепи, содержащие только *линейные* элементы, называют *линейными*, а цепи, в которых имеется хотя бы один *нелинейный* элемент, — *нелинейными*.

Если параметр a_k элемента можно изменять путем приложения к нему управляющего воздействия, то такой элемент называют *управляемым*. Управляемыми могут быть резистивные, емкостные и индуктивные элементы.

Если параметр a_k элемента не изменяется, когда за воздействие принимают переменную y_k , а реакцией считают переменную x_k , то такой элемент называют *обратимым* или *взаимным*. Если же при взаимной замене переменных параметр a_k изменяется, то такой элемент называют *необратимым* или *невзаимным*. Цепи, содержащие только *обратимые* элементы, называют *обратимыми*. Если же в цепи содержится хотя бы один *необратимый* элемент, то всю цепь называют *необратимой*. К *необратимым* элементам относят различные электронные и полупроводниковые приборы — *транзисторы, электровакуумные триоды и пентоды, операционные усилители* и др. К *обратимым* элементам относят *резисторы, индуктивные катушки, конденсаторы и трансформаторы*.

Элемент цепи называют *стационарным*, если значение параметра a_k не зависит от времени. Если же значение параметра a_k является функцией времени, то элемент называют *нестационарным* или *параметрическим*. Электрическую цепь, содержащую хотя бы один *нестационарный* элемент, называют *нестационарной* или *параметрической*.

Весьма важным является знак энергии, поступающей в элемент. Если энергия $W(t)$, поступающая в элемент, в любой момент времени имеет положительное значение, то такой элемент называют *пассивным*, так как он способен только потреблять энергию. Если же энергия, поступающая в элемент, в какой-либо момент времени может принимать отрицательное значение, то такой элемент называют *активным*, так как он способен отдавать энергию во внешнюю цепь. К *активным* элементам относят *неуправляемые и управляемые источники напряжения и тока*, а также некоторые типы *электронных и полупроводниковых приборов* (транзисторы, электровакуумные триоды и пентоды, операционные усилители и др.), которые при наличии сторонних источников питания способны отдавать энергию во внешнюю цепь; их можно рассматривать как *источники напряжения или тока, управляемые внешними воздействиями*.

Цепи с электронными и полупроводниковыми приборами в определенных режимах способны усиливать воздействие по мощности за счет потребления

энергии от сторонних источников питания. В связи с этим такие цепи называют *активными* в отличие от *пассивных* цепей, которые способны только потреблять энергию и в которых усиление по мощности невозможно.

Основными законами электрических цепей являются уравнения Кирхгофа для токов и напряжений ветвей, вытекающие из уравнений Максвелла. В соответствии с принципом непрерывности электрического тока для любого узла электрической цепи или замкнутого сечения справедлив *первый закон Кирхгофа*:

$$\sum i_k = 0, \quad (2.6)$$

который утверждает, что электрические заряды в узле или сечении любой электрической цепи накапливаться не могут.

Так как любая электрическая цепь является потенциальной, то для замкнутого контура справедлив *второй закон Кирхгофа*:

$$\sum u_k = 0, \quad (2.7)$$

который утверждает, что работа по перемещению зарядов в замкнутом контуре равна нулю.

Рассмотрим цепь, изображенную на рис.2.2, образованную двухполюсными элементами (ветвями), направления токов и напряжений в которых совпадают. Тем самым предполагается, что мощность, рассеиваемая или преобразуемая в элементах, положительна. Ветви в местах соединений образуют узлы 1–4. Для составления уравнений Кирхгофа выберем произвольные замкнутые сечения, которые могут охватывать один (S_1) или несколько ($S_{1,4}$) узлов, и замкнутый контур 1, направление обхода которого указано на рис.2.2.

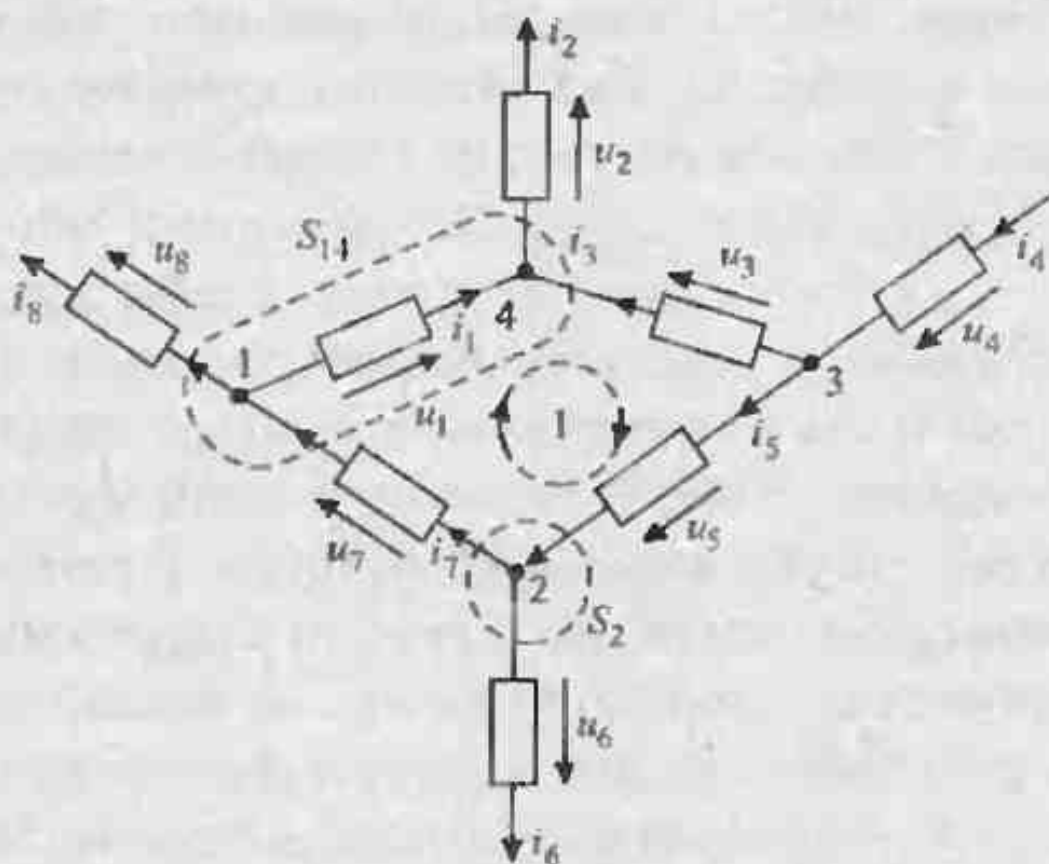


Рис. 2.2. Пример цепи с двухполюсными элементами

Условимся токи, выходящие из сечений, считать положительными, тогда уравнения, записанные по первому закону Кирхгофа, примут вид:

$$\begin{aligned}i_2 + i_8 - i_7 - i_3 &= 0 \text{ (для } S_{1,4}), \\i_7 + i_6 - i_5 &= 0 \text{ (для } S_2).\end{aligned}$$

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа положительными принимают напряжения, совпадающие с направлением обхода контура, и уравнение для контура I имеет вид

$$u_1 - u_3 + u_5 + u_7 = 0.$$

Законы Кирхгофа являются общими законами электрической цепи и не зависят от ее элементного состава и характеристик отдельных элементов. Они одинаково справедливы для линейных и нелинейных, пассивных и активных, стационарных и нестационарных электрических цепей. Законы Кирхгофа и модель электрической цепи с сосредоточенными параметрами применимы во всех случаях, когда время распространения электромагнитной энергии в цепи пренебрежимо мало по сравнению с периодом воздействий в этой цепи.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ И СИГНАЛЫ

Лекция 3. Гармонические воздействия и способы их описания

Классификация воздействий в электрических цепях. Воздействиями в электротехнике и электронике называют различные проявления электромагнитных сил, приводящие к изменению состояния электрической цепи. Под влиянием воздействий в электрической цепи возникают реакции, которые определяются как видом воздействия, так и характеристиками самой цепи. Если воздействия используются для передачи информации, то они называются электрическими сигналами. При этом основными величинами, характеризующими состояние электрической цепи, являются электрическое напряжение и ток.

Воздействия $x(t)$ и реакции $y(t)$ в опико-электронных устройствах и электротехнических системах могут иметь разнообразную форму в зависимости от их функционального назначения. В этой лекции мы познакомимся с видами и характеристиками различных воздействий, рассмотрим математические способы описания, которые используются при расчетах установившихся и переходных процессов в электрических цепях. При рассмотрении математических моделей воздействий в дальнейшем будем использовать понятие обобщенного воздействия $x(t)$ [или реакции $y(t)$], которое может быть как напряжением, так и током.

Все воздействия в электрических цепях можно разделить по их назначению на *регулярные, или детерминированные, и нерегулярные, или случайные.* Детерминированными называют воздействия, заданные в виде некоторой определенной функции времени. Такие воздействия обычно используются для передачи энергии или при измерениях. Детерминированные воздействия можно разделить на периодические и непериодические.

Периодическими называют воздействия, для которых существует отрезок времени T , отвечающий условию периодичности $x(t) = x(t + nT)$, где $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. К периодическим воздействиям относятся гармонические колебания и периодические последовательности импульсов различной формы. Физически такие процессы существовать не могут, поскольку предполагается, что они не имеют ни начала, ни конца во времени. Однако использование идеализированных периодических воздействий значительно упрощает исследование процессов в электрических цепях, поэтому они широко применяются в задачах анализа и синтеза электрических цепей.

Если воздействия не отвечают условно периодичности, то они называются *непериодическими*. Обычно непериодические детерминированные воздействия ограничены во времени и значительно лучше отображают реальные воздействия в электрических цепях. К непериодическим воздействиям относят одиночные импульсы или группы импульсов различной формы. Весьма часто непериодические воздействия задаются отрезками периодических функций.

Случайными называют воздействия, являющиеся произвольными функциями времени. Такие воздействия обычно используются для передачи информации в виде речи, музыки и др. К случайным воздействиям также относятся различные виды помех от действия источников внутренних шумов в электронных приборах, резисторах и других элементах электрических цепей.

Случайные воздействия оценивают по их вероятностным характеристикам (математическому ожиданию, дисперсии, вероятностным распределениям и др.) и подразделяют на стационарные и нестационарные.

В связи с тем, что анализ свойств электрических цепей при регулярных воздействиях более нагляден, в курсе электротехники в основном рассматриваются детерминированные воздействия как периодические, так и непериодические.

Гармонические колебания являются основным видом возмущений и реакций в энергетических электрических сетях и системах. Генерирование гармонических напряжений и токов в диапазоне частот $10\text{--}10^3$ Гц обычно производится электромеханическими генераторами, а более высоких частот — с помощью электронных устройств.

Мгновенное значение гармонического воздействия представляет собой синусоидальные и косинусоидальные функции, аргументом которых является время (рис. 3.1, б) или угол $\theta = \omega t$:

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \psi) = A_m \cos(\theta + \psi). \quad (3.1)$$

Они характеризуются тремя параметрами: *амплитудой* A_m , *начальной фазой* ψ и *угловой частотой* (скоростью изменения аргумента — угла $\omega t = \theta$)

$$\omega = 2\pi / T = 2\pi f, \quad (3.1a)$$

где T — период гармонической функции; $f = 1/T$ — частота колебания.

Начальная фаза ψ , представляющая собой алгебраическую величину, будет положительной; ее отсчитывают вправо к точке $t = 0$, когда гармоническая функция смещена влево относительно начала координат (рис. 3.1, б). Если сдвиг фаз между двумя гармоническими колебаниями $x_1(t)$ и $x_2(t)$ положителен ($\varphi = \psi_1 - \psi_2 > 0$), то говорят, что колебание $x_1(t)$ опережает колебание $x_2(t)$. Если сдвиг фаз отрицателен ($\varphi = \psi_1 - \psi_2 < 0$), то говорят, что

колебание $x_1(t)$ отстает от колебания $x_2(t)$. При $\varphi = 0$ говорят, что колебания $x_1(t)$ и $x_2(t)$ находятся в фазе. При сдвиге фаз $\varphi = \pm 180^\circ$ говорят, что колебания находятся в противофазе, а при $\varphi = \pm 90^\circ$ — в квадратуре.

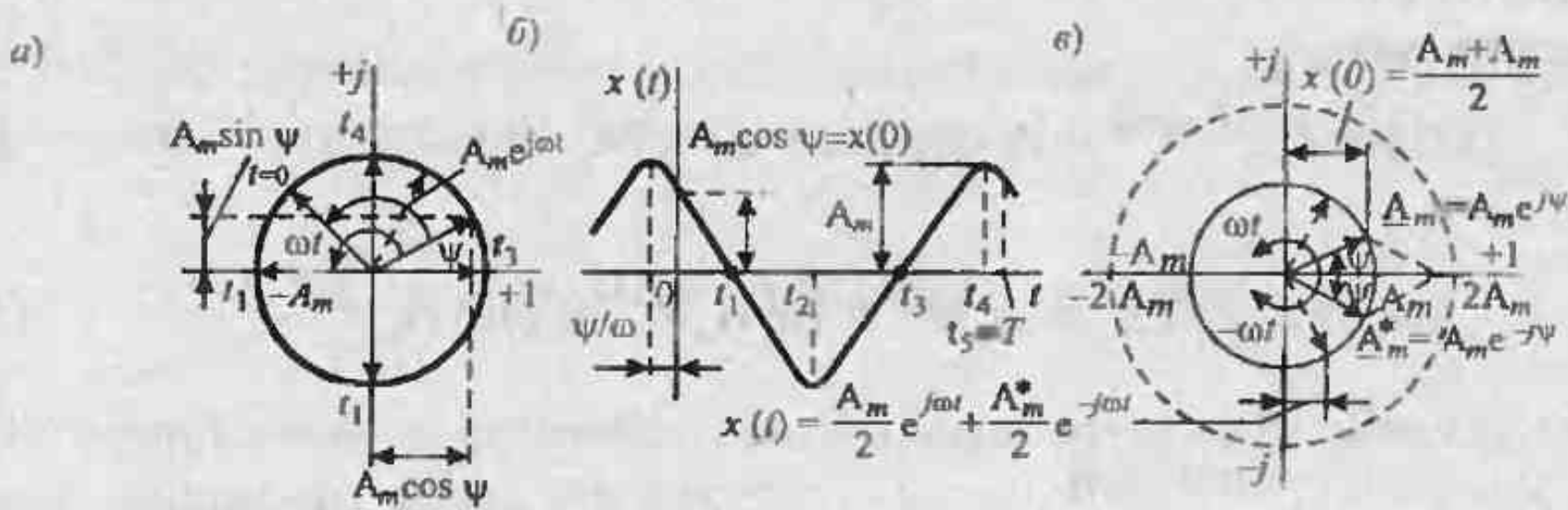


Рис. 3.1. Векторная диаграмма (а), мгновенное значение (б) и разложение на два вектора (в) гармонического колебания.

Любое гармоническое колебание с произвольной начальной фазой можно представить в виде суммы двух колебаний с нулевыми начальными фазами, находящихся в квадратуре:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_m \cos(\omega t + \psi) = A_m \cos \psi \cos \omega t - \\ &- A_m \sin \psi \sin \omega t = a_m \cos \omega t + b_m \sin \omega t, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$a_m = A_m \cos \psi, \quad b_m = -A_m \sin \psi, \quad (3.2a)$$

$$A_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}, \quad \psi = \arctg(-b_m / a_m). \quad (3.2b)$$

Линейная комбинация нескольких гармонических колебаний с одной и той же частотой дает результирующее гармоническое колебание той же частоты. Дифференцирование и интегрирование гармонических колебаний приводит к гармоническим колебаниям той же частоты, сдвинутым по фазе на 90° , т.е. находящимся в квадратуре с исходным сигналом:

$$(d/dt) A_m \cos(\omega t + \psi) = \omega A_m \cos(\omega t + \psi + 90^\circ), \quad (3.3)$$

$$\int A_m \cos(\omega t + \psi) = (A_m / \omega) \cos(\omega t + \psi - 90^\circ). \quad (3.4)$$

Поскольку при расчете сложных цепей операции с гармоническими трансцендентными функциями бывают затруднительны, на практике применяют комплексные представления гармонических колебаний. Используя показательную и алгебраическую формы комплексной величины (воздействия)

$\dot{x}(t) = A_m e^{j(\omega t + \psi)}$, аргумент которой растет пропорционально времени t , легко показать, что гармонические функции представляют собой проекции этого вращающегося вектора на оси мнимых и вещественных чисел комплексной плоскости (рис.3.1, а).

Действительно,

$$\dot{x}(t) = A_m e^{j(\omega t + \psi)} = A_m \cos(\omega t + \psi) + jA_m \sin(\omega t + \psi) \quad (3.5)$$

и

$$\dot{x}(t) = A_m e^{j\psi} e^{j\omega t} = \dot{A}_m e^{j\omega t} = \operatorname{Re} \dot{A}_m e^{j\omega t} + j \operatorname{Im} \dot{A}_m e^{j\omega t}, \quad (3.5a)$$

где

$$\dot{A}_m = A_m e^{j\psi} \quad (3.6)$$

комплексная амплитуда гармонического воздействия.

Таким образом, синусоидальная функция времени представляет собой проекцию вращающегося с угловой скоростью ω вектора \dot{A}_m , длина которого равна амплитуде колебаний A_m , на ось мнимых чисел, а косинусоидальная функция времени — проекцию вращающегося вектора \dot{A}_m на ось вещественных чисел комплексной плоскости:

$$A_m \sin(\omega t + \psi) = \operatorname{Im} \dot{A}_m e^{j\omega t}; \quad A_m \cos(\omega t + \psi) = \operatorname{Re} \dot{A}_m e^{j\omega t}. \quad (3.7)$$

Иначе говоря, любому гармоническому воздействию $x(t)$ на комплексной плоскости соответствует комплексное воздействие $\dot{x}(t)$ (3.5), представляющее собой вращающийся с угловой скоростью ω вектор $A_m e^{j\psi}$, длина которого равна амплитуде колебания A_m . Благодаря этому анализ электрических цепей можно производить не при гармонических, а при комплексных воздействиях, соответствие между которыми устанавливается формулами (3.5)–(3.7).

Если расчет процессов в электрической цепи при гармонических воздействиях одинаковой частоты ω выполнять на комплексной плоскости, то все воздействия и реакции будут изображаться вращающимися с одинаковой скоростью ω векторами, неподвижными друг относительно друга. Это обстоятельство позволяет изображать гармонические функции комплексными числами \dot{A}_m , которые характеризуются только амплитудой A_m и начальной фазой ψ . При этом линейные операции над мнимыми и вещественными частями комплексных чисел заменяются операциями над самими комплексными числами, что возможно благодаря коммутативности линейных операций относительно выделения вещественной и мнимой частей.

Воздействия, представленные в комплексной форме, обладают рядом важных для анализа электрических цепей свойств. Любое комплексное воздей-

стве согласно формуле (3.5) можно представить в виде суммы двух квадратурных колебаний:

$$\dot{x}(t) = A_m \cos(\omega t + \psi) + jA_m \sin(\omega t + \psi).$$

Дифференцирование комплексного воздействия сводится к умножению его комплексной амплитуды на оператор поворота $j\omega = \omega e^{j\pi/2}$, так как

$$(d/dt)\dot{x}(t) = (d/dt)\dot{A}_m e^{j\omega t} = j\omega \dot{A}_m e^{j\omega t}. \quad (3.8)$$

Интегрирование комплексного воздействия сводится к делению его комплексной амплитуды на $j\omega$, так как

$$\int \dot{x}(t) dt = \int \dot{A}_m e^{j\omega t} dt = (\dot{A}_m / j\omega) e^{j\omega t}. \quad (3.9)$$

Использование комплексных представлений значительно упрощает расчет цепей и лежит в основе метода комплексных амплитуд (символический метод). Дело в том, что интегродифференциальные уравнения цепи при расчете методом комплексных амплитуд сводятся к алгебраическим относительно комплексных амплитуд воздействия $\dot{x}(t)$ и реакции $\dot{y}(t)$, а общий множитель $e^{j\omega t}$, который входит в выражения $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$, сокращается. Определение мгновенного значения колебания по его комплексной амплитуде производят по одной из формул (3.7).

Пример 3.1. Дано гармоническое колебание $x(t) = 4 \cos(100t + 30^\circ)$. Определить амплитуды квадратурных составляющих колебаний и представить данное колебание в комплексной форме.

Решение. Амплитуды квадратурных колебаний

$$a_m = A_m \cos \psi = 4 \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}, \quad b_m = -A_m \sin \psi = -4 \sin 30^\circ = -2.$$

Комплексная амплитуда колебания имеет вид

$$\dot{A} = A_m e^{j\psi} = 4e^{j30^\circ},$$

а изображение его на комплексной плоскости

$$\dot{x}(t) = \dot{A}_m e^{j\omega t} = 4e^{j(100t+30^\circ)}.$$

Пример 3.2. Известно комплексное воздействие $\dot{x}(t) = 10e^{j(200t+45^\circ)}$.

Определить соответствующее ему мгновенное значение гармонического колебания, мгновенные значения квадратурных составляющих и представить колебание в алгебраической форме комплексного воздействия.

Решение. Согласно формуле (3.7) мгновенное значение гармонического колебания

$$x(t) = \operatorname{Re} [10e^{j(200t+45^\circ)}] = 10 \cos(200t + 45^\circ).$$

Амплитуды квадратурных составляющих (3.2а) имеют значения

$$a_m = 10 \cos 45^\circ = 5\sqrt{2}, \quad b_m = -10 \cos 45^\circ = -5\sqrt{2}.$$

Разложение гармонического колебания на квадратурные составляющие (3.2) равно

$$x(t) = 5\sqrt{2} \cos 200t - 5\sqrt{2} \sin 200t.$$

Алгебраическая форма комплексного воздействия имеет вид

$$\dot{x}(t) = \dot{A}_m e^{j\omega t} = \dot{A}_m (\cos \omega t + j \sin \omega t) = 10e^{j45^\circ} (\cos 200t + j \sin 200t),$$

а комплексная амплитуда

$$\dot{A}_m = 10e^{j45^\circ} = \dot{A}_m (\cos \psi + j \sin \psi) = 5\sqrt{2} + j5\sqrt{2}.$$

Гармонические функции аргумента θ могут иметь другую геометрическую интерпретацию, если воспользоваться формулами Эйлера:

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}. \quad (3.10)$$

Полагая $\theta = \omega t + \psi$, для косинусоидального воздействия согласно (3.10), (3.6) получим

$$\begin{aligned} x(t) &= A_m \cos(\omega t + \psi) = (A_m / 2) [e^{j(\omega t + \psi)} + e^{-j(\omega t + \psi)}] = \\ &= (A_m / 2) e^{j\psi} e^{j\omega t} + (A_m / 2) e^{-j\psi} e^{-j\omega t} = \\ &= (\dot{A}_m / 2) e^{j\omega t} + (\dot{A}_m^* / 2) e^{-j\omega t}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $\dot{A}_m^* = A_m e^{-j\psi}$ — комплексная амплитуда, сопряженная с комплексом \dot{A}_m .

Полученная формула (3.11) показывает, что любое гармоническое колебание может быть представлено как результат сложения двух вращающихся в разные стороны со скоростью ω комплексно-сопряженных векторов, равных $A_m/2$. На рис. 3.1, в изображены два вращающихся вектора $\dot{A}_m e^{j\omega t}$ и $\dot{A}_m^* e^{-j\omega t}$, полусумма которых для любого момента времени представляет собой вещественную величину, равную косинусоидальной функции $A_m \cos(\omega t + \psi)$.

Лекция 4. Периодические негармонические воздействия и способы их описания

Многочисленные электронные и оптоэлектронные устройства вырабатывают *периодические негармонические* (политармонические) *электрические* сигналы. К таким устройствам относятся полупроводниковые преобразователи (выпрямители и инверторы), различные автогенераторы, мультивибраторы и т. д. Колебания в цепи с этими устройствами являются периодическими функциями времени $f(t)$, закон изменения которых повторяется через определенный временной интервал, называемый *периодом повторяемости* T (рис.4.1, а). Основной угловой частотой периодического электрического сигнала называют $\omega = \omega_1 = 2\pi/T$. Периодические электрические сигналы могут быть непрерывными (рис.4.1, а) или иметь конечное число разрывов на периоде (рис.4.1, б, в). Таким образом, большинство периодических электрических сигналов удовлетворяет условиям Дирихле.

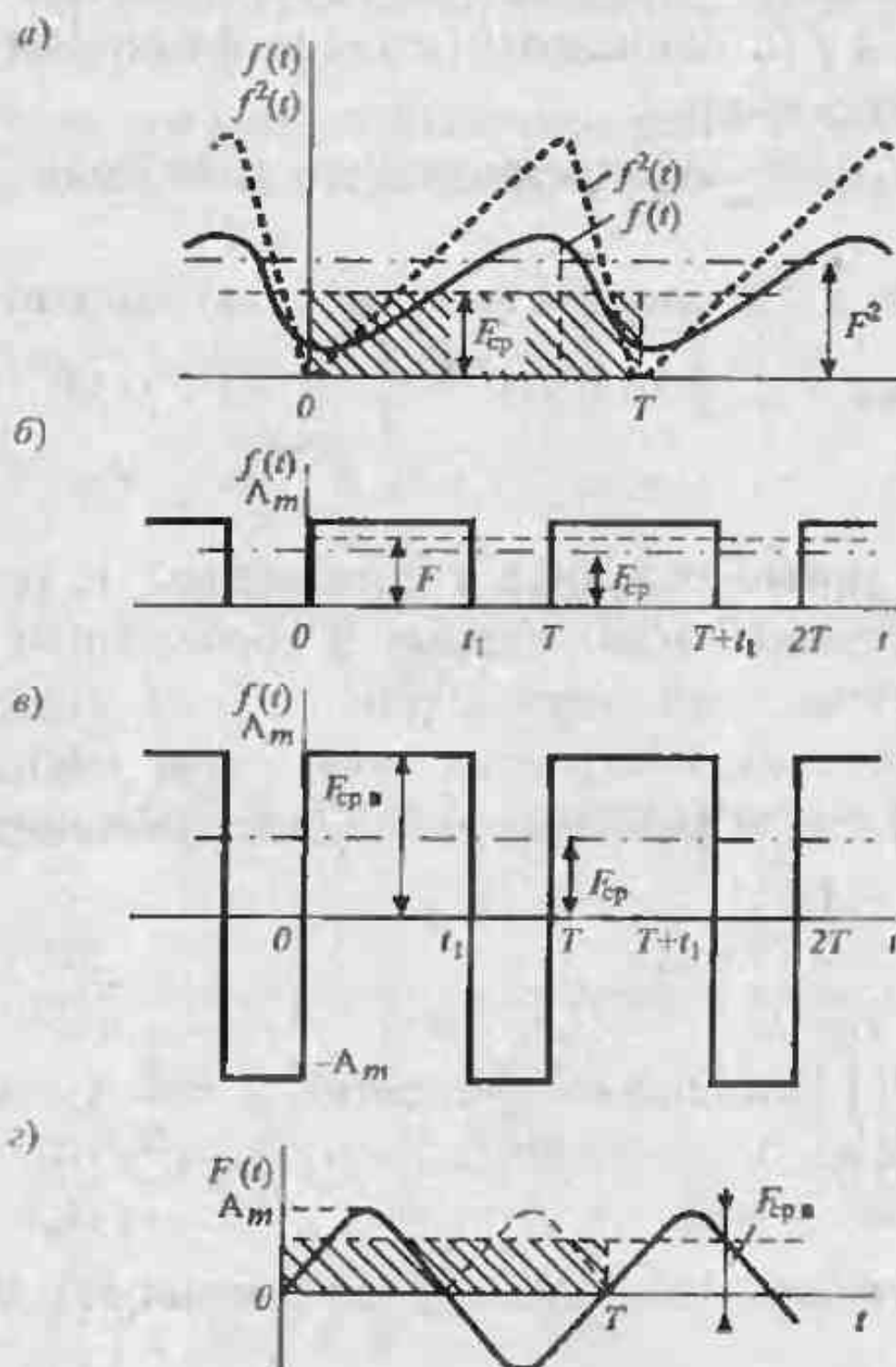


Рис. 4. 1. Периодические негармонические воздействия: произвольной формы (а), однополярные прямоугольные импульсы (б), разнополярные прямоугольные импульсы (в), синусоидальное (г)

Если интерес представляют энергетические характеристики воздействий или реакций, то часто пользуются интегральными оценками: средним, средневыпрямленным и среднеквадратичным значениями.

Среднее за период значение (постоянная составляющая) периодического сигнала $f(t)$

$$F_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{a_0}{2} = A_0. \quad (4.1)$$

Среднее за период значение F_{cp} равно высоте прямоугольника с основанием T , площадь которого равна площади, ограниченной осью абсцисс и функцией $f(t)$ за один период (рис. 4.1, а). Среднее значение тока или напряжения в электрических цепях измеряется приборами магнитоэлектрической системы. Среднее за период значение функций, у которых площади положительных и отрицательных значений $f(t)$ одинаковы (к таким функциям относят и гармонические функции), равно нулю.

Средневыпрямленное значение электрического колебания

$$F_{\text{cp.в.}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |f(t)| dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt. \quad (4.2)$$

Оно равно высоте прямоугольника с основанием T , площадь которого равна площади, ограниченной осью абсцисс и абсолютным (выпрямленным) значением функции $f(t)$ за один период (рис. 4.1, б). Средневыпрямленное значение напряжения и тока измеряется приборами магнитоэлектрической системы с выпрямителем. Средневыпрямленное значение гармонической функции $f(t) = A_m \sin \omega t$

$$F_{\text{cp.в.}} = \frac{2A_m}{T} \int_0^{T/2} |\sin \omega t| dt = \frac{2A_m}{\omega T} \left| -\cos \omega t \right|_0^{T/2} = \frac{2}{\pi} A_m = 0,637 A_m.$$

Среднеквадратичное, или действующее (эффективное), значение периодической функции

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} f^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt}. \quad (4.3)$$

Значение F равно высоте прямоугольника, площадь которого равна площади, ограниченной осью абсцисс и функцией $f(t)$ за один период (рис. 4.1, а).

Сила взаимодействия двух проводников с одинаковыми токами и тепловое действие тока пропорциональны квадрату тока. Поэтому действующее значение тока (или напряжения) измеряется приборами индукционной, электродинамической, электромагнитной, тепловой и термоэлектрической систем.

Действующее значение гармонической функции $f(t) = A_m \sin \omega t$ равно:

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T A_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{A_m^2}{2T} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt} = \frac{A_m}{\sqrt{2}}.$$

Номинальные токи и напряжения многих электронных и электромеханических устройств характеризуются их действующими значениями.

Пример 4.1. Найти среднее, средневыпрямленное и действующее значения сигналов в виде знакопостоянных и знакопеременных Π -импульсов, изображенных на рис. 4.1, б, в.

Решение. Для сигнала, представленного на рис. 4.1, б расчет $F_{\text{ср}}$ и $F_{\text{ср.в}}$ выполняется по формулам (4.1), (4.2).

$$F_{\text{ср}} = F_{\text{ср.в}} = \frac{1}{T} \int_0^{t_1} A_m dt = A_m \frac{t_1}{T} = A_m \gamma.$$

Используя формулу (4.3), найдем действующее значение

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{t_1} A_m^2 dt} = A_m \sqrt{\frac{t_1}{T}} = A_m \sqrt{\gamma}, \text{ где } \gamma = \frac{t_1}{T} \text{ — относительная продолжительность импульса.}$$

Аналогично для знакопеременного прямоугольного колебания (рис. 4.1, в) найдем

$$F_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \left(\int_0^{t_1} A_m dt - \int_{t_1}^T A_m dt \right) = \frac{A_m}{T} [t_1 - (T - t_1)] = A_m (2\gamma - 1),$$

$$F_{\text{ср.в}} = \frac{1}{T} \left(\int_0^{t_1} A_m dt + \int_{t_1}^T A_m dt \right) = A_m,$$

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \left(\int_0^{t_1} A_m^2 dt + \int_{t_1}^T A_m^2 dt \right)} = A_m = F_{\text{ср.в}}.$$

Разложение периодических негармонических колебаний в ряд Фурье. Исследование явлений в электрических цепях, для которых возможна линеаризация процессов, выполняют методом наложения, при котором возмущения и реакции раскладываются на элементарные составляющие, формы которых удобны для расчета. Большинство периодических электрических сигналов характеризуется функциями $f(t)$, удовлетворяющими условиям Дирихле, и может быть представлено в виде ряда Фурье — бесконечной суммы гармонических составляющих: постоянной составляющей $A_0 = a_0/2 = A_{m0}/2$ основной гармоники с частотой $\omega_1 = 2\pi/T$ и высших гармонических составляющих, частоты которых кратны основной частоте.

Каждая гармоника характеризуется амплитудой A_{mk} (или действующим значением A_k), начальной фазой α_k и частотой $\omega = k\omega_1$, где $k = 1, 2, 3, \dots$ — порядковый номер гармоники. Так как каждая гармоника может быть представлена в виде полусуммы двух вращающихся в противоположные стороны с угловыми скоростями $\omega = \pm k\omega_1$ векторов, то ряд Фурье может быть записан как в тригонометрической, так и в комплексной форме:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_1 t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_1 t = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \cos(k\omega_1 t - \alpha_k), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (4.5)$$

постоянная составляющая функции $f(t)$, равная ее среднему за период значению;

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega_1 t dt = A_{mk} \cos \alpha_k \quad (4.5a)$$

коэффициенты ряда Фурье при косинусоидальных членах, являющиеся четной функцией номера гармоники k или частоты $\omega_k = k\omega_1$;

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega_1 t dt = A_{mk} \sin \alpha_k \quad (4.5b)$$

коэффициенты ряда Фурье при синусоидальных членах, являющиеся нечетной функцией номера гармоники k или частоты ω_k ;

$$A_{mk} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \alpha_k = \arctg(b_k / a_k) \quad (4.6)$$

амплитуда и начальная фаза k -й гармоники.

В комплексной форме ряда Фурье экспоненциальным членам придаются отрицательные и положительные порядковые номера, поэтому при определении отдельных гармоник берется полусумма двух членов ряда:

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_{mk} e^{jk\omega_1 t}, \quad (4.7)$$

где \dot{A}_{mk} — комплексная амплитуда k -й гармоники.

Комплексную амплитуду k -й гармонической составляющей определяют с помощью интеграла, преобразующего периодическую функцию времени $f(t)$ в комплексную спектральную функцию дискретных значений частоты ω_k :

$$\dot{A}_{mk} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = a_k - jb_k = A_{mk} e^{-j\alpha_k}. \quad (4.7a)$$

Зная комплексные амплитуды ряда Фурье, можно определить мгновенное значение негармонического колебания. Используя соотношения (4.4), (4.5), получим

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_{mk} e^{jk\omega_1 t} \right). \quad (4.8)$$

Комплексные коэффициенты $\dot{A}_{mk} = A_{mk} e^{-j\alpha_k}$ зависят от дискретных значений частоты $k\omega_1$ и образуют комплексный частотный спектр электрического сигнала. Каждый комплексный коэффициент \dot{A}_{mk} определяет амплитуду $A_{mk}(k\omega_1)$ и фазу $\alpha_k(k\omega_1)$ гармонических составляющих сигнала. Зависимость $A_{mk}(k\omega_1)$ называют *амплитудным спектром*, $\alpha_k(k\omega_1)$ — *фазовым спектром* электрического сигнала $f(t)$.

Пример 4.2. Определить частотный спектр сигнала, представляющего собой периодическую последовательность прямоугольных импульсов с относительной продолжительностью $\gamma = t_1/T = 0,25$ и максимальным значением, равным единице (рис. 4.2, а)

Решение. Комплексные амплитуды спектра найдем по формуле (4.7а):

$$\begin{aligned} \dot{A}_{mk} &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{2}{T} \int_{-t_1/2}^{t_1/2} e^{-jk\omega_1 t} dt = \\ &= \frac{2}{T} \frac{e^{-jk\omega_1 t} \Big|_{-t_1/2}^{t_1/2}}{-jk\omega_1} = \frac{2t_1}{T} \frac{\sin \frac{k\omega_1 t_1}{2}}{\frac{k\omega_1 t_1}{2}} = 2\gamma \frac{\sin x}{x} = A_{mk} e^{-j\alpha_k}, \end{aligned}$$

где $x = k\omega_1 t_1/2 = k\pi\gamma$.

Постоянная составляющая сигнала имеет значение

$$\left| \frac{A_{m0}}{2} \right| = \gamma \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \gamma.$$

Амплитуды отдельных гармоник сигнала находим по формуле

$$A_{mk} = \left| 2\gamma \frac{\sin x}{x} \right| = \left| 2\gamma \frac{\sin k\pi\gamma}{k\pi\gamma} \right|.$$

Они обращаются в ноль при $\sin x = 0$ или $x = \pm n\pi (n = 1, 2, 3, \dots)$, что соответствует значениям угловых частот $\omega_k = \pm \omega_1/\gamma, \pm 2\omega_1/\gamma, \dots$ или $\pm 2\pi/t_1; \pm 4\pi/t_1, \dots$

В интервале частот $-\omega_1/\gamma \leq \omega \leq \omega_1/\gamma$ комплексные амплитуды оказываются положительными вещественными, и, следовательно, начальные фазы $\alpha_k = 0$. На следующих частотных интервалах $-2\omega_1/\gamma \leq \omega \leq -\omega_1/\gamma$ и $\omega_1/\gamma \leq \omega \leq 2\omega_1/\gamma$ знак $\sin k\pi\gamma / (k\pi)$ становится отрицательным, и α_k равно соответственно $-\pi$ и $+\pi$.

На рис. 4.2, б, в изображены амплитудный $|A_{mk}/2|$ и фазовый α_k спектры, представляющие собой отрезки вертикальных линий, пропорциональные постоянной составляющей $A_0 = a_0/2$ и половинам амплитуд гармонических составляющих (рис. 4.2, б), а также начальным фазам α_k (рис. 4.2, в) всех гармоник.

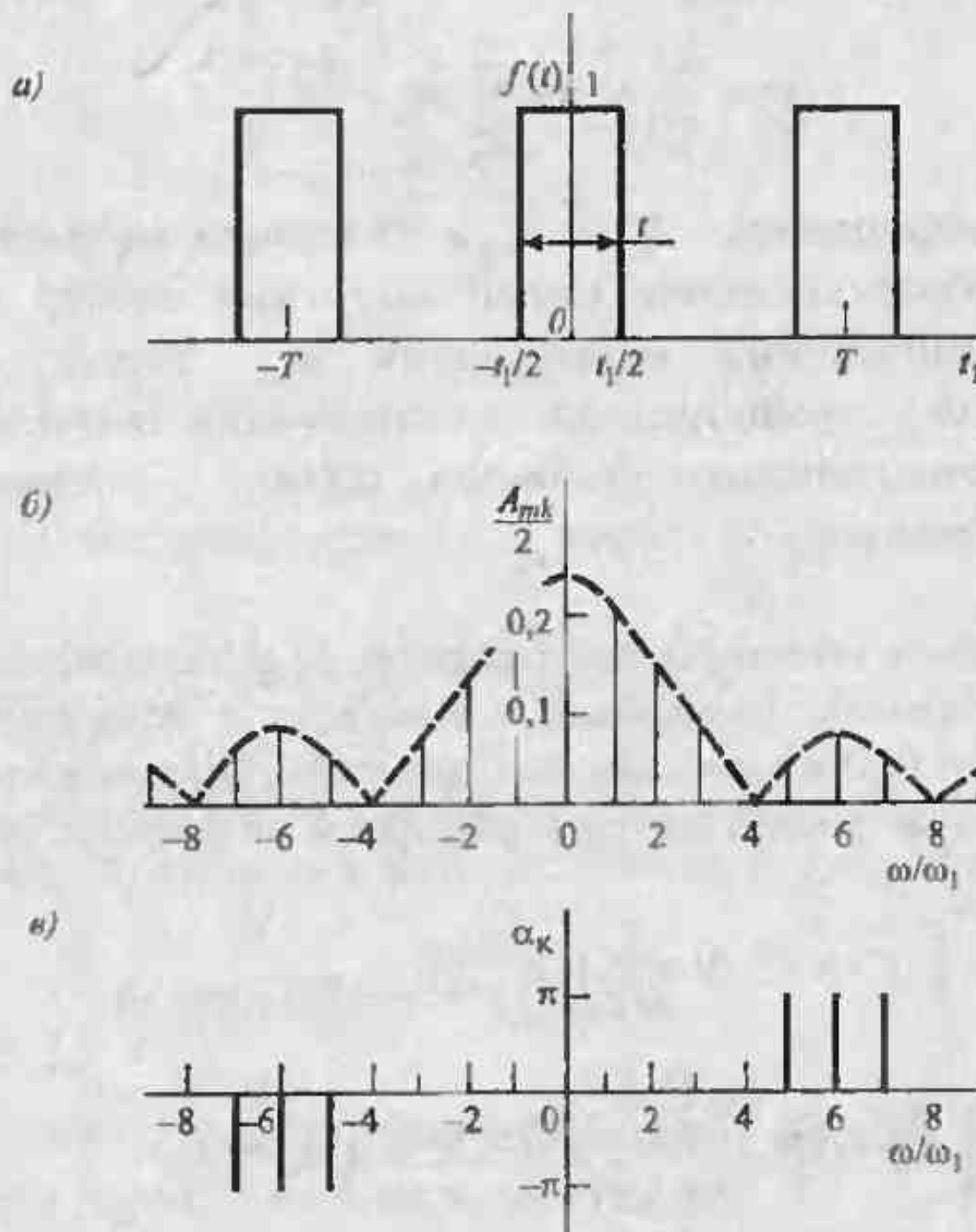


Рис. 4.2. Периодические однополярные импульсы (а), их амплитудный (б) и фазовый (в) спектры.

Таким образом, *периодические колебания имеют дискретные (линейчатые) спектры*, в которых расстояние по оси частот между смежными спектральными линиями равно $\Delta\omega = \omega_1 = 2\pi/T$. С увеличением периода T колебания плотность спектральных линий возрастает, а амплитуды гармонических составляющих уменьшаются. Фазовый спектр зависит от выбора начала отсчета времени. Если периодический сигнал $f(t)$ смещается вправо (запаздывает) на время Δt , то начальные фазы гармоник изменяются на угол $-k\omega_1\Delta t$, пропорциональный времени запаздывания. При этом амплитудный спектр сигнала не изменяется.

Отдельные гармонические составляющие сигнала можно экспериментально выделить с помощью специального прибора. Экспериментально можно выделить и отдельные квадратурные составляющие гармоник. Приборы, выделяющие отдельные гармоники сигнала, называются спектроанализаторами и содержат различные электрические фильтры. Приборы, выделяющие квадратурные составляющие гармоник, называются анализаторами квадратурных сигналов и содержат различные синхронные (когерентные) фильтры.

Теоретически ряд Фурье содержит бесконечно большое число членов, однако форма многих электрических сигналов такова, что ряд быстро сходится, и при расчете можно ограничиться только небольшим числом гармоник. По амплитудному спектру можно наглядно установить соотношения между амплитудами гармоник и судить о полосе частот, в пределах которой сигнал несет основную долю энергии.

Важным свойством ряда Фурье является *ортogonalность* его составляющих. При этом сигналы $f_1(t)$ и $f_2(t)$ ортогональны, если среднее значение их произведения равно нулю, т. е. если

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt = 0. \quad (4.9)$$

Так, ортогональными являются синусоиды и косинусоиды различных частот. Свойство ортогональности составляющих ряда Фурье позволяет получить простую формулу для расчета интеграла от произведения двух периодических функций:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \cos(k\omega_1 t - \alpha_k) \text{ и} \\ f_2(t) &= \frac{b_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} B_{mv} \cos(v\omega_1 t - \beta_v), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{a_0 b_0}{4} + \sum_{k=v=1,2,3,\dots} \frac{A_m B_{mv}}{2} \cos(\alpha_k - \beta_v).$$

Применяя формулу (4.10) для случая $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$, получим выражение для квадрата действующего значения периодической функции, называемое *равенством Парсеваля*:

$$F^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{mk}^2}{2}. \quad (4.11)$$

Это равенство позволяет представить действующие значения периодического напряжения

$$u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \cos(k\omega_1 t - \psi_{Uk})$$

и тока

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \cos(k\omega_1 t - \psi_{Ik})$$

в виде

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u^2 dt} = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk}^2} = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}, \quad (4.12)$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i^2 dt} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk}^2} = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}, \quad (4.12a)$$

где $U_{mk} = U_{mk} / \sqrt{2}$, $I_k = I_{mk} / \sqrt{2}$ — действующие значения k -й гармоники напряжения и тока соответственно.

Средняя мощность периодического колебания может быть определена по формуле (4.10):

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u i dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \cos(k\omega_1 t - \psi_{Uk}) \right] \times \\ &\quad \times \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \cos(k\omega_1 t - \psi_{Ik}) \right] dt = U_0 I_0 + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{mk} I_{mk}}{2} \cos(\psi_{Uk} - \psi_{Ik}) = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $\varphi_k = \psi_{Uk} - \psi_{Ik}$ — фазовый сдвиг между k -ми гармониками напряжения и тока.

Средняя мощность периодического колебания равна сумме средних мощностей, выделяемых каждой гармонической составляющей колебания. Зная амплитудный спектр и сравнивая квадраты амплитуд отдельных гармоник, можно оценить распределение общей мощности сигнала по частотному диапазону.

Лекция 5. Непериодические воздействия и способы их описания

Непериодическое воздействие как совокупность гармонических колебаний. Непериодический сигнал можно рассматривать как предел периодического колебания, имеющего ту же форму импульсов на периоде T , при частоте $f = 1/T \rightarrow 0$ (рис. 5.1, а, б). Действительно, при безграничном увеличении периода T периодическая последовательность импульсов вырождается в единственный импульс — непериодический сигнал (рис. 5.1, в). Мы уже знаем, что увеличение периода колебания периодического сигнала приводит к росту числа гармонических составляющих (сгущению спектра) и к уменьшению их амплитуд. Гармонические составляющие непериодического сигнала лежат бесконечно близко друг к другу, заполняя всю шкалу частот, а значения их амплитуд стремятся к нулю, так как согласно формуле (4.7а)

$$|A_{mk}|_{T \rightarrow 0} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right| = 0.$$

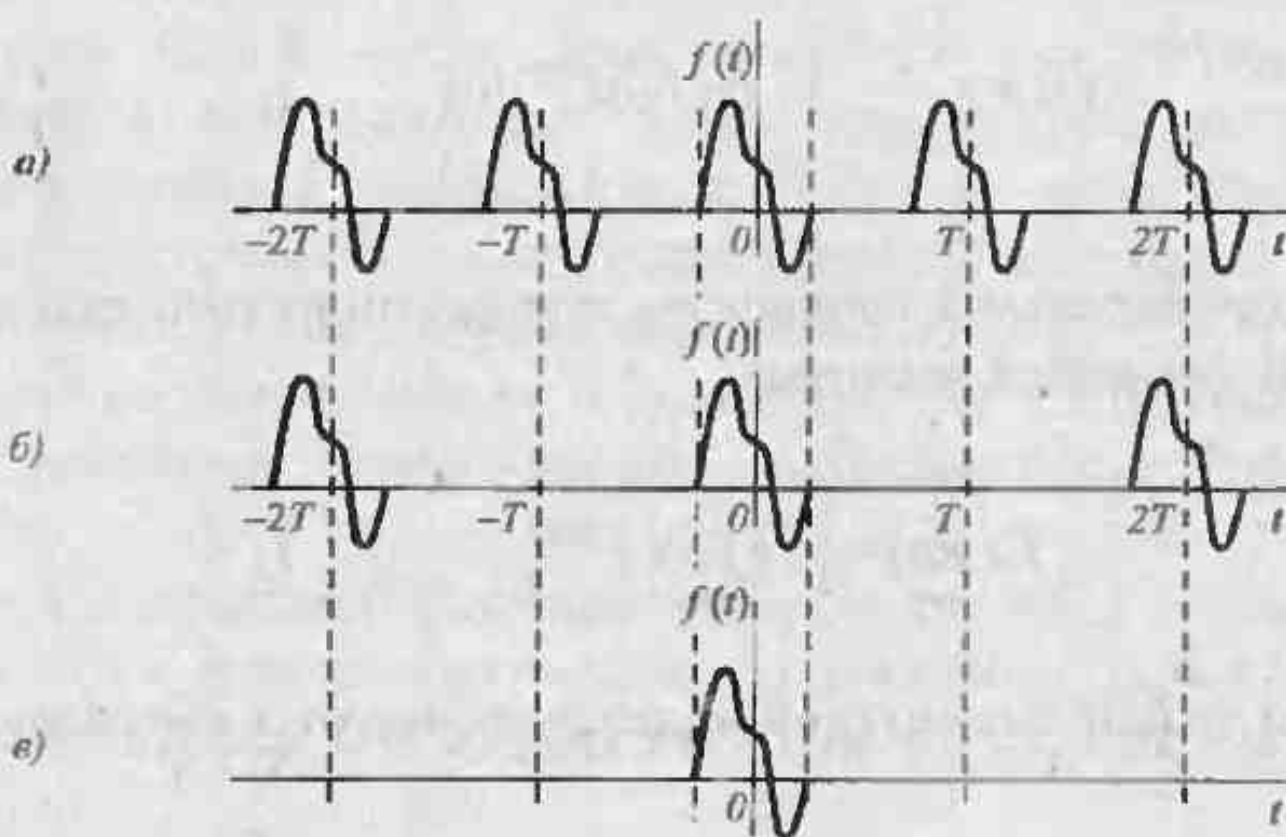


Рис. 5.1. Способ представления непериодического воздействия: с периодом T (а), с периодом $2T$ (б) и при $T \rightarrow \infty$ (в)

Для характеристики периодического сигнала, если длина импульса $t_n < T$ (рис. 5.1, а), можно ввести комплексную функцию $F_k(j\omega_k)$, характеризующую лишь форму сигнала и не зависящую от периода T , которая связана с комплексной амплитудой ряда Фурье (4.7а) соотношением

$$F(j\omega_k) = \frac{\pi}{\omega_1} \dot{A}_{mk} = \frac{T}{2} \dot{A}_{mk} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (5.1)$$

Эта комплексная величина не обращается в ноль при $T \rightarrow \infty$ и может характеризовать непериодическое колебание.

Действительно, если $T \rightarrow \infty$ и $\Delta\omega_k = \omega_1 = 2\pi/T \rightarrow d\omega$, $\omega_k = k\omega_1 \rightarrow \omega$ и $j\omega_k \rightarrow j\omega$, то интеграл (5.1) превращается в интеграл прямого преобразования Фурье, определяющий спектральную плотность непериодического сигнала $f(t)$:

$$\dot{F}(j\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (5.2)$$

Аналогично, этот предельный переход переводит комплексную форму ряда Фурье (4.7)

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_{mk} e^{jk\omega_1 t} = \frac{\omega_1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j\omega_k) e^{j\omega_k t}$$

в интеграл обратного преобразования Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \dot{F}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.2a)$$

Таким образом, спектральная плотность непериодического сигнала, являющаяся комплексной функцией частоты,

$$\dot{F}(j\omega) = |\dot{F}(j\omega)| e^{j\psi(\omega)}, \quad (5.3)$$

связана с бесконечно малой амплитудой колебаний частоты соотношением

$$|A(j\omega)| = \frac{|\dot{F}(j\omega)|}{\pi} d\omega. \quad (5.4)$$

Абсолютное значение спектральной функции с точностью до постоянного множителя $1/\pi$ характеризует плотность амплитуд бесконечно малых гармонических колебаний, так как амплитуда колебаний в полосе частот, заключенной между ω и $\omega + d\omega$, пропорциональна ширине полосы частот $d\omega$. Амплитудный спектр $|\dot{F}(j\omega)| = F(\omega)$ непериодического сигнала имеет размерность, равную произведению размерности самой функции на время. Функция $\psi(\omega) = \arg \dot{F}(j\omega)$ представляет собой фазовый спектр непериодического сигнала и характеризует изменение начальных фаз бесконечно малых гармонических колебаний

в непрерывном спектре частот $\frac{|\dot{F}(j\omega)|}{\pi} d\omega \cos[\omega t + \psi(\omega)]$.

Энергия непериодического сигнала. Аналогично равенству Парсевалю (4.11) для периодических колебаний, для непериодических сигналов справедлива теорема Рэлея:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{F}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\dot{F}(j\omega)|^2 d\omega. \quad (5.5)$$

Эта теорема позволяет определять энергию при действии в цепи непериодического сигнала интегрированием квадрата абсолютного значения его спектральной плотности в диапазоне частот ω от $-\infty$ до ∞ . Если $f(t)$ представляет собой ток или напряжение, то левая часть равенства (5.5) пропорциональна энергии, выделенной непериодическим колебанием на некотором сопротивлении r . Так как эту же величину в уравнении (5.5) находят путем интегрирования функции $|\dot{F}(j\omega)|^2$ по частоте, то очевидно, что эта функция характеризует распределение энергии непериодического сигнала по частоте. Спектр непериодического сигнала занимает всю область частот, однако энергетически значимые участки спектра расположены в тех частотных диапазонах, в пределах которых значения $|\dot{F}(j\omega)|^2$ относительно велики. Определение этих частотных диапазонов необходимо при проектировании электронных преобразовательных и фильтрующих устройств. Площадь, ограниченная зависимостью $|\dot{F}(j\omega)|^2 = \varphi(\omega)$ и осью частот между двумя ее значениями ω_1 и ω_2 , изображает часть общей энергии сигнала, которая переносится гармоническими составляющими, лежащими в частотном диапазоне $\omega_1 - \omega_2$.

Расчет спектральной функции непериодического сигнала адекватен представлению его в виде совокупности незатухающих гармонических колебаний, что позволяет исследовать переходные процессы в ЛЭЦ методом комплексных амплитуд.

Пример 5.1. Рассчитать и построить спектральные характеристики одиночного прямоугольного импульса тока или напряжения (рис.5.2, а) при условии:

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{при } 0 < t < t_1; \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > t_1. \end{cases}$$

Решение. Комплексную спектральную плотность сигнала определяем по формуле (5.2):

$$\begin{aligned} \dot{F}(j\omega) &= \int_0^{t_1} A e^{-j\omega t} dt = A \frac{1 - e^{-j\omega t_1}}{j\omega} = \\ &= \frac{2A}{\omega} e^{-j\omega t_1/2} \frac{e^{j\omega t_1/2} - e^{-j\omega t_1/2}}{2j} = \\ &= 2A e^{-j\omega t_1/2} \frac{\sin \frac{\omega t_1}{2}}{\omega} = |\dot{F}(j\omega)| e^{j\psi(\omega)}. \end{aligned}$$

Модуль спектральной плотности (амплитудный спектр)

$$|\dot{F}(j\omega)| = 2A \frac{\sin \frac{\omega t_1}{2}}{\omega}.$$

В частотной зависимости $|F(j\omega)|$ имеются нули, которые располагаются при частотах, соответствующих равенству $\sin(\omega t_1/2) = 0$, т.е. при $\omega t_1/2 = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots, \pm n\pi$. Таким образом, n -я узловая частота $\omega_{yn} = 2n\pi/t_1$ или $f_{yn} = \omega_{yn}/(2\pi) = n/t_1$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. При $\omega \rightarrow 0$ функцию $F(j\omega)$ определяют путем раскрытия неопределенности:

$$F(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} |\dot{F}(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} 2A \frac{\sin \frac{\omega t_1}{2}}{\omega} = At_1.$$

Таким образом, значение спектральной плотности на оси абсцисс является наибольшим и равным площади импульса At_1 . С увеличением частоты амплитуда спектральной функции убывает и при частоте $f_{y1} = 1/t_1$ становится равной нулю (рис. 5.2, б). В диапазоне более высоких частот располагаются следующие лепестки спектральной плотности сигнала, амплитуды которых убывают с частотой (рис. 5.2, б). Частотная зависимость $|\dot{F}(j\omega)|$ симметрична относительно оси ординат и является нечетной функцией частоты ω [или $f = \omega/(2\pi)$].

Фазовый спектр $\psi(\omega)$ определяют в соответствии со знаком функции

$\frac{1}{\omega} \sin \frac{\omega t_1}{2}$ и значением оператора поворота $e^{-j\omega t_1/2}$ (рис. 5.2, в).

$$\psi(\omega) = -\omega t_1/2 \text{ при } 0 < \omega < \omega_{y1} = 2\pi/t_1,$$

$$\psi(\omega) = -\omega t_1/2 + \pi \text{ при } 2\pi/t_1 < \omega < 4\pi/t_1 \text{ и т. д.}$$

Заметим, что амплитудный спектр прямоугольного импульса совпал с огибающей линейчатого спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов, изображенного на рис. 4.2, б.

Теоретически амплитудный спектр импульса не ограничен по частоте, но можно определить в соответствии с теоремой Рэлея некоторую полосу частот, в которой сосредоточена большая часть энергии импульса (0,9 от всей энергии импульса). Можно подсчитать, что в частотном диапазоне первого лепестка амплитудного спектра $0 \leq f \leq 1/t_1$ сосредоточено приблизительно 96% всей энергии импульса. Ширина значимой доли спектра обратно пропорциональна длительности импульса. С укорочением импульса его спектр расширяется.

Если анализировать спектр одиночных прямоугольных импульсов переменной длительности t_n и одинаковой площади, равной единице ($A = 1/t_n$), то при укорочении такого импульса значение максимальной амплитудной спектральной плотности, равной площади импульса, остается неизменным, а значения узловых частот $\omega_{yn} = 2\pi n/t_n$ увеличиваются. При этом амплитудный спектр уплощается (пунктир на рис.5.2, б). В пределе, когда $t_n \rightarrow 0$, а $A = 1/t_n \rightarrow \infty$, Π -импульс превращается в импульсную функцию $\delta(t)$, спектральная плотность которой равна постоянной вещественной величине $At_n = 1$ при всех частотах (рис.5.2, б).

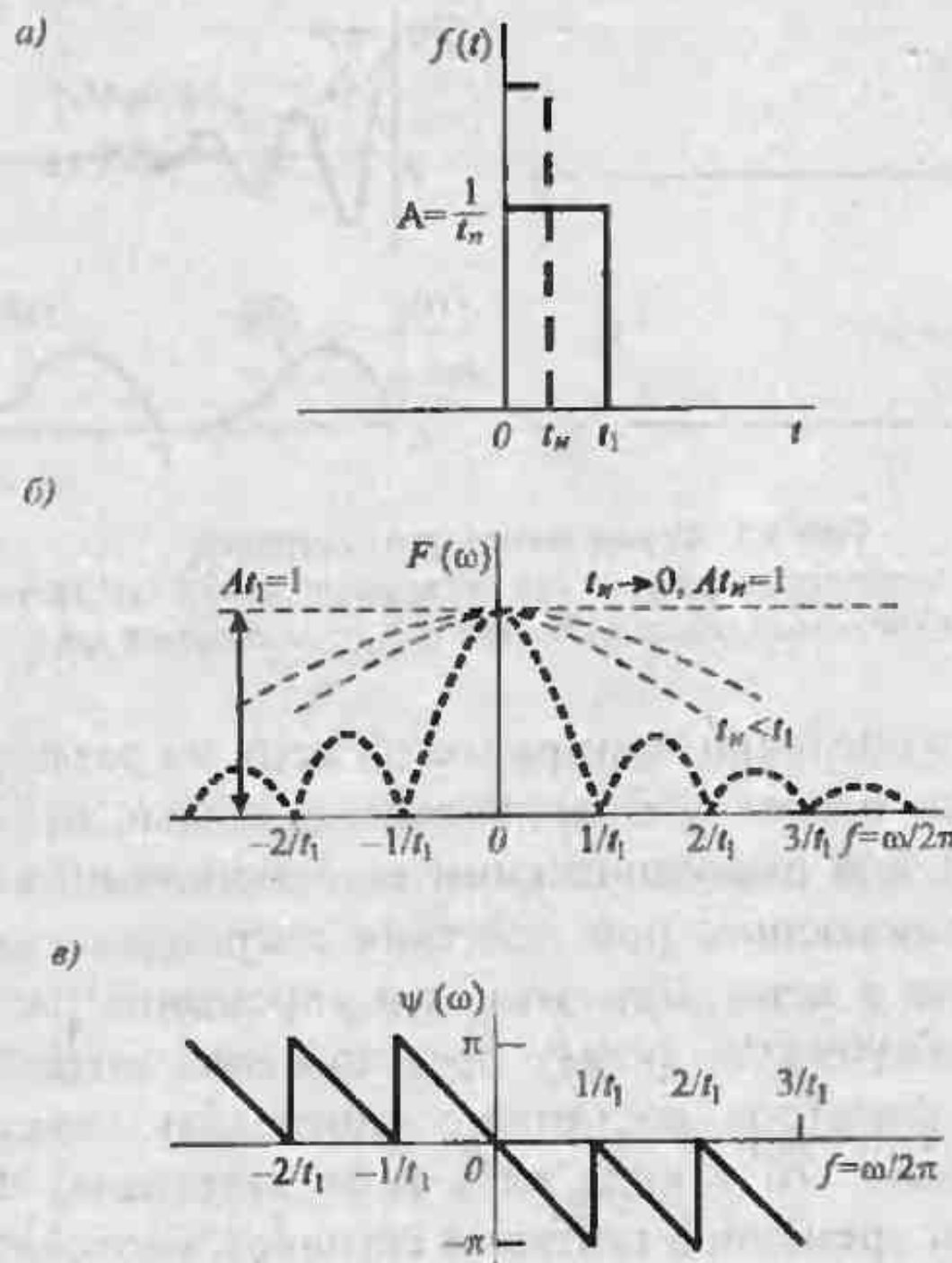


Рис. 5.2. Прямоугольный импульс (а), его амплитудный (б) и фазовый (в) спектры

Применение преобразований Лапласа и Фурье для описания электрических сигналов. В различных оптоэлектронных и автоматических устройствах осуществляется преобразование электрических сигналов в широком амплитудном и частотном диапазонах. При этом сигналы могут иметь различную частоту следования и различную форму, могут быть периодическими или непериодическими. В цифровых или импульсных устройствах наиболее часто встречаются ступенчатые (рис. 5.3, а) или импульсные (рис. 5.3, б-г) сигналы. Весьма распространенными являются также различные периодические последовательности импульсных сигналов (рис. 5.3, ж) или модулированные по амплитуде или частоте гармонические колебания (рис. 5.3, д, е).

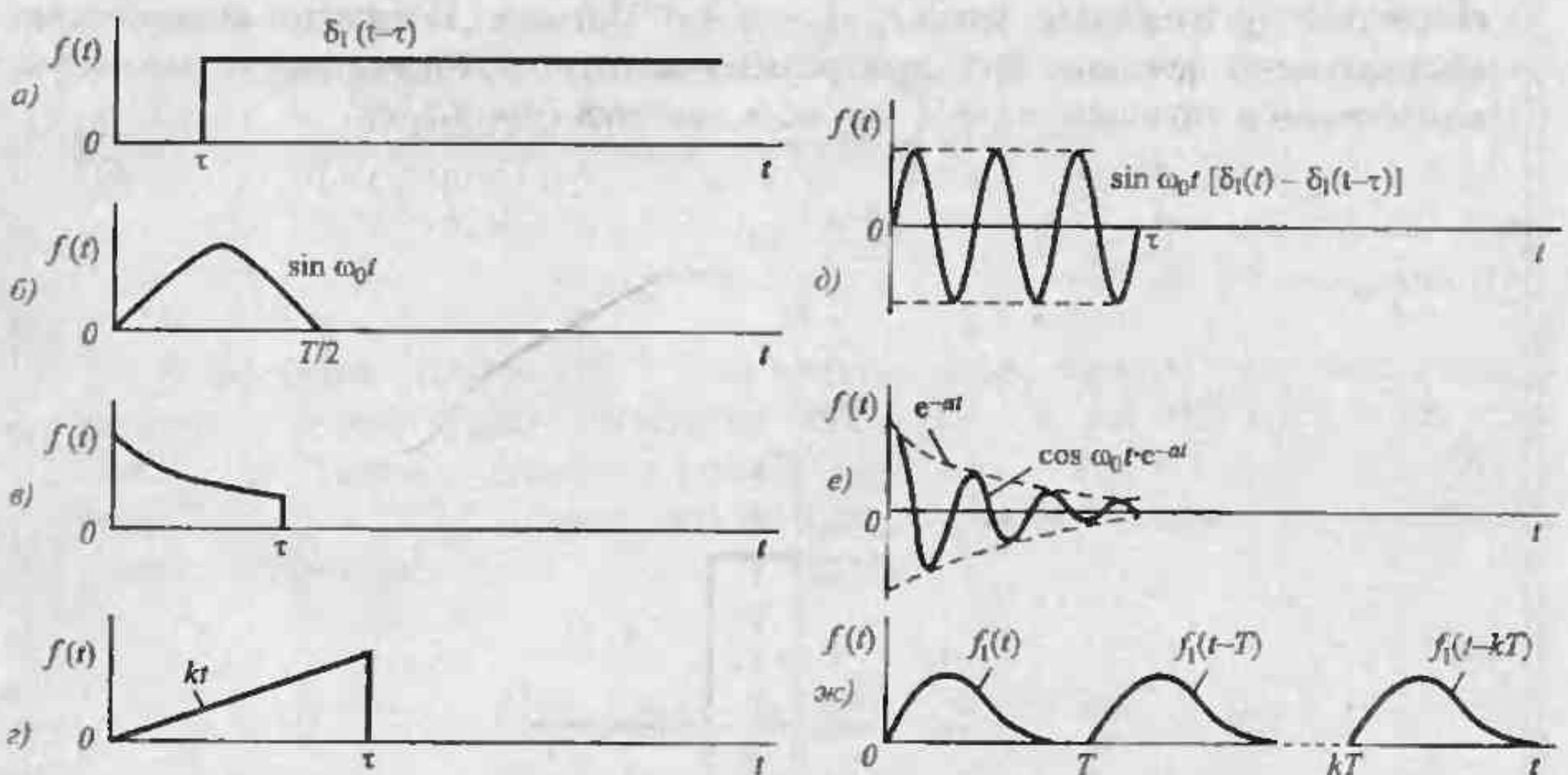


Рис. 5.3. Формы импульсных сигналов: ступенчатого (а); полусинусоидального (б); экспоненциального (в); треугольного (г); гармонического (д); затухающего (е); произвольного (ж)

Задача определения реакции электрической цепи на различные воздействия предполагает не только расчет установившихся режимов, которые возможны в цепях с постоянными или периодическими воздействиями, но и расчет переходных режимов, возникающих при действии аperiodических сигналов или вследствие коммутации в цепи. При этом для упрощения расчета необходимо найти удобную аналитическую форму представления воздействия. Так, при изучении частотных фильтров достаточно определить спектральный состав колебания и представить его в виде ряда (или интеграла) Фурье. В других случаях, например при временной селекции сигналов, целесообразно использовать представление сигналов их мгновенными значениями.

В зависимости от решаемой задачи и вида воздействия для представления непериодических воздействий используют две группы методов: 1) представле-

ние сигналов их мгновенными значениями и расчет цепей в плоскости вещественного времени t ; 2) представление сигналов в комплексном виде и перевод расчета цепи в плоскость функций комплексной переменной s .

В случае представления сигналов их мгновенными значениями расчет электрических цепей производят путем решения интегродифференциальных уравнений цепи различными методами. Для изображения сигналов на плоскости комплексного переменного используют методы преобразования Лапласа (\mathcal{L} -преобразование) и преобразование Фурье (\mathcal{F} -преобразование). Метод расчета цепей, основанный на представлении сигнала и реакции с помощью преобразования Лапласа, называют операторным, а метод расчета, основанный на использовании преобразования Фурье, — спектральным или частотным.

Преобразования Лапласа и Фурье позволяют заменить непериодические воздействия бесконечными суммами элементарных составляющих в виде гармонических функций с непрерывным спектром (\mathcal{F} -преобразование) или гармонических функций, затухающих по экспоненте (\mathcal{L} -преобразование). Схема методов расчета электрических цепей с использованием \mathcal{F} - или \mathcal{L} -преобразований приведена на рис.5.4.

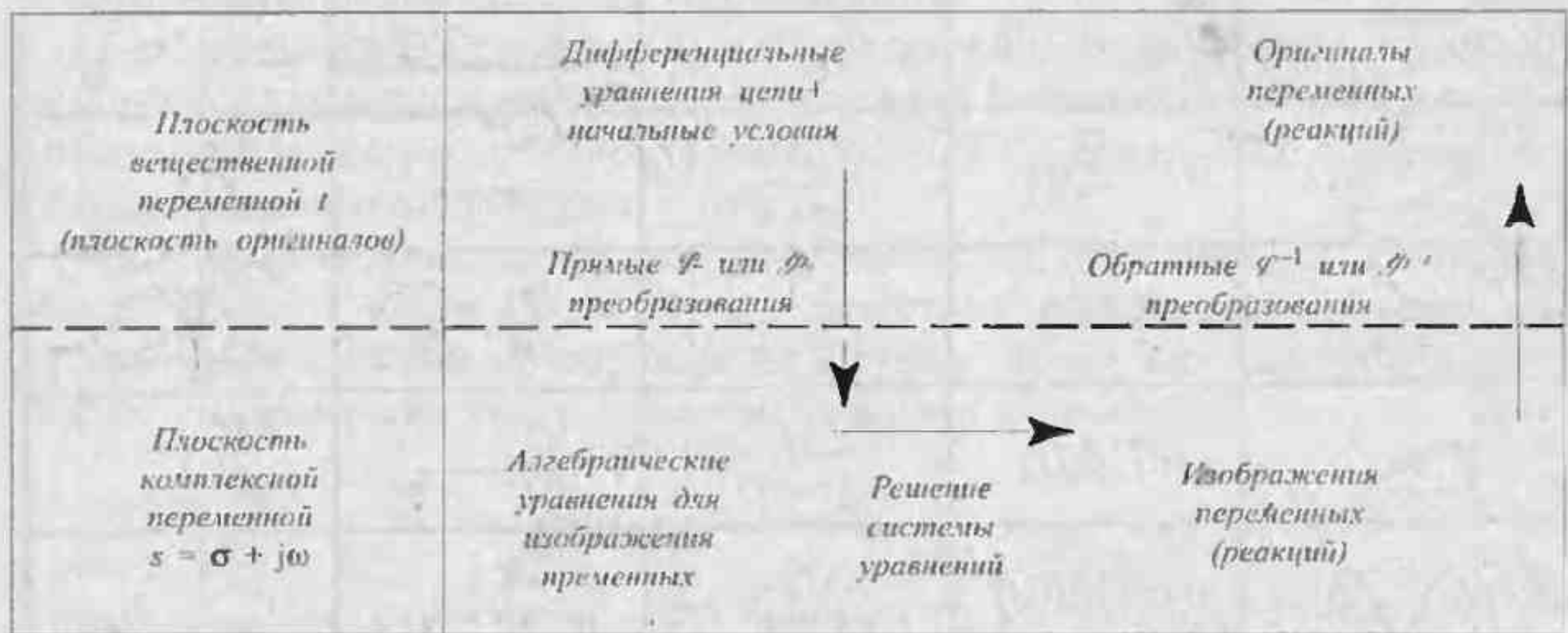


Рис. 5. 4. Схема переходов из временной в частотную область

Изображение по Лапласу некоторого непериодического сигнала $f(t)$ в плоскости комплексной переменной $s = \sigma + j\omega$

$$\mathcal{L} \cdot [f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s) \quad (5.6)$$

может быть найдено для любой кусочно-непрерывной функции с конечным числом разрывов, заданной в области $t > 0$ и равной нулю при $t < 0$, если эта

функция возрастает не быстрее некоторой показательной функции $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$ при $t > 0$ и интеграл в выражении (5.6) сходится абсолютно.

Для удовлетворения условию сходимости интеграла необходимо, чтобы вещественная часть комплексной переменной превышала абсциссу абсолютной сходимости, т. е. выполнялось условие $\sigma > \sigma_0$. Практически для всех воздействий, встречающихся в электрических и электронных устройствах и системах, преобразование Лапласа сходится. Некоторые изображения наиболее часто встречающихся сигналов приведены в табл.5.1.

Таблица 5.1

Электрические сигналы и их изображения на s плоскости

Электрический сигнал (функция времени)	Мгновенное значение сигнала $f(t)$	L -изображение $F(s)$	Расположение особых точек на плоскости $s = \sigma + j\omega$	Амплитудный спектр $F(\omega)$
	$\delta(t)$	1		
	$\delta_1(t)$	$\frac{1}{s}$		
	$e^{-\alpha t} \delta_1(t)$	$\frac{1}{s + \alpha}$		
	$e^{\alpha t} \delta_1(t)$	$\frac{1}{s - \alpha}$		
	$t e^{-\alpha t} \delta_1(t)$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$		
	$\sin(\omega_0 t) \delta_1(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$		
	$\cos(\omega_0 t) \delta_1(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$		
	$t \sin(\omega_0 t) \delta_1(t)$	$\frac{2s\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$		
	$e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t) \delta_1(t)$	$\frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$		
	$e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) \delta_1(t)$	$\frac{\alpha + s}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$		

Для нахождения мгновенного значения временной функции по ее операторному изображению используют *обратное преобразование Лапласа*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds. \quad (5.7)$$

В электротехнических задачах для обратного \mathcal{L} -преобразования обычно используют теорему о вычетах, согласно которой

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{s=s_k} F(s)e^{s_k t}, \quad (5.8)$$

где $\operatorname{Res}_{s=s_k} F(s)$ — вычет функции $F(s)$ в полюсе $s = s_k$.

На основании формулы (5.8) выводят теоремы разложения, позволяющие отыскать реакции в электрических цепях при некоторых типовых воздействиях в случаях, когда изображения реакций $F(s)$ представляет собой дробно-рациональные функции комплексного переменного s .

Для определения мгновенных значений сигналов по их операторным изображениям и для выполнения обратных операций на практике часто пользуются таблицами *операторного соответствия* $f(t) \doteq F(s)$. Операторные соответствия некоторых сигналов приведены в табл. 5.1.

При анализе процессов в электрических цепях при действии непериодических сигналов используют некоторые известные из курса высшей математики теоремы и свойства преобразования Лапласа. Среди них важнейшими для теории электрических цепей являются: *свойство линейности*

$$\mathcal{L} \left[\sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \right] = \sum_{k=1}^n a_k F_k(s) \quad (5.9)$$

и замена операций дифференцирования и интегрирования оригинала $f(t)$ соответственно операциями умножения и деления изображения $F(s)$ на комплексную переменную s :

$$\mathcal{L} \frac{df(t)}{dt} = sF(s) - f(0_+), \quad (5.10)$$

$$\mathcal{L} \left[\int f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{(\int f(t) dt)_{t=0_+}}{s}, \quad (5.11)$$

где $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$; $F_k(s) = \mathcal{L}[f_k(t)]$; $f(0)$ — значение оригинала $f(t)$ при $t = 0$;;
 $\left(\int f(t) dt\right)_{t=0}$ — значение интеграла функции $f(t)$ к моменту времени $t = 0$..

Формулы 5.9–5.11 применяют для отыскания изображений на комплексной плоскости линейных интегродифференциальных уравнений, характеризующих электромагнитные процессы в электрических цепях. При этом изображения приобретают вид линейных алгебраических уравнений, решая которые определяют изображение реакций цепи, а затем — и оригинал реакции.

Таким образом, применение преобразования Лапласа позволяет алгебраизировать линейные дифференциальные уравнения электрических цепей. Кроме того, с помощью преобразования Лапласа можно достаточно просто определить функции передачи электрических цепей, которые характеризуют изменения, производимые цепью в частотном спектре электрического сигнала, т. е. частотные свойства электрических цепей.

Спектральный метод расчета, при котором используется интегральное преобразование Фурье (5.2), позволяет качественно и количественно оценить переходные процессы в электрической цепи. При этом должна быть определена комплексная спектральная плотность апериодического сигнала $F(j\omega)$ с помощью прямого преобразования Фурье, которое может быть получено из интегрального преобразования Лапласа (5.6) путем замены комплексной переменной $s = \sigma + j\omega$ на $j\omega$ при $\sigma = 0$.

Если сигнал удовлетворяет условию $f(t) = 0$ при $t < 0$, то можно использовать одностороннее преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (5.12)$$

Идентичность выражений (5.6) и (5.12) позволяет применить основные формулы, полученные для преобразования Лапласа, при использовании преобразования Фурье. Однако для существования преобразования Фурье функция $f(t)$ должна удовлетворять условию абсолютной интегрируемости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad (5.12a)$$

Это условие не допускает непосредственного применения преобразования Фурье для некоторых типов сигналов, например ступенчатых или полубесконечных гармонических сигналов, приведенных в табл. 5.1. В этих случаях для определения спектральных плотностей пользуются специальными приемами, рассмотренными далее.

Если воздействие удовлетворяет условию $f(t) \neq 0$ при $t < 0$, то для характеристики сигнала используют двустороннее преобразование Фурье:

$$\dot{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (5.13)$$

Прямое \mathcal{F} -преобразование переводит электрический сигнал $f(t)$ в комплексную функцию $\dot{F}(j\omega)$ частоты ω . Обратное преобразование Фурье \mathcal{F}^{-1} , позволяет определить мгновенное значение сигнала по его спектральной плотности $\dot{F}(j\omega)$, и оно всегда является двусторонним:

$$\mathcal{F}^{-1}[\dot{F}(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.14)$$

Основные свойства преобразования Фурье можно получить из свойств преобразования Лапласа, полагая $s = j\omega$.

Преобразование Фурье, как и преобразование Лапласа, обладает свойством *линейности*, поэтому

$$\sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \doteq \sum_{k=1}^n a_k \dot{F}_k(j\omega), \quad (5.15)$$

где $\dot{F}_k(j\omega) = \mathcal{F}[f_k(t)]$.

Запаздывание функции времени $f(t)$ на время t_0 приводит к умножению ее спектральной плотности на $e^{-j\omega t_0}$:

$$f(t-t_0) \doteq \dot{F}(j\omega)e^{-j\omega t_0}, \quad (5.16)$$

где $f(t) \doteq \dot{F}(j\omega)$.

Выражение (5.16) показывает, что *смещение некоторого апериодического сигнала во времени вызывает изменение лишь фазового спектра сигнала и не приводит к изменению амплитудного спектра*.

При использовании двустороннего преобразования Фурье (5.13) начальные условия в теореме дифференцирования и интегрирования не вводят, поэтому

$$\frac{df(t)}{dt} \doteq j\omega \dot{F}(j\omega), \quad (5.17)$$

$$\int f(t) dt \doteq \frac{\dot{F}(j\omega)}{j\omega}. \quad (5.18)$$

Примеры неперiodических воздействий. Для исследования временных и частотных характеристик электрических цепей используют различные типовые неперiodические воздействия. Кроме того, многие воздействия в импульсных и цифровых устройствах являются неперiodическими импульсными сигналами. Среди различных импульсных неперiodических воздействий наибольшее распространение получили: единичная ступенчатая функция $\delta_1(t)$ (функция включения), единичная импульсная функция $\delta(t)$ (функция Дирака), экспоненциально нарастающая или убывающая импульсная функция, ступенчатая гармоническая импульсная функция, прямоугольный одиночный импульс и некоторые другие типы неперiodических сигналов.

Единичное ступенчатое воздействие $\delta_1(t)$ характеризует возмущение в цепи при включении на ее вход идеализированного источника напряжения или тока посредством идеального ключа, обладающего нулевым сопротивлением (рис 5.5, а). Единичное ступенчатое воздействие представляет собой функцию, которая в момент времени $t = 0$ изменяется скачком от 0 до 1 (рис 5.5, б).

Аналитически оно может быть представлено в виде

$$\delta_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (5.19)$$

Так, при включении в момент времени $t = 0$ источника постоянного напряжения E или тока J воздействие может быть записано в виде $e(t) = E\delta_1(t)$ или $j(t) = J\delta_1(t)$.

Если замыкание ключа в схеме, представленной на рис. 5.5, а, происходит с запаздыванием на время t_0 относительно момента времени $t = 0$, то воздействие характеризуется запаздывающей ступенчатой функцией (рис. 5.5, в)

$$\delta_1(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ 1 & \text{при } t > t_0. \end{cases} \quad (5.20)$$

Умножение некоторой функции $f(t)$ на единичную ступенчатую функцию (5.19) обращает эту функцию в нуль при $t < 0$ и оставляет ее без изменения при $t > 0$. Умножение той же функции $f(t)$ на запаздывающую единичную ступенчатую функцию (5.20) обращает эту функцию в нуль при $t < t_0$ и оставляет ее без изменения при $t > t_0$.

Единичная импульсная функция $\delta(t)$ представляет собой идеализированное импульсное воздействие произвольной формы, длительность которого бесконечно мала, а размах неограниченно велик. Площадь единичной импульсной функции конечна и равна единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = 1. \quad (5.21)$$

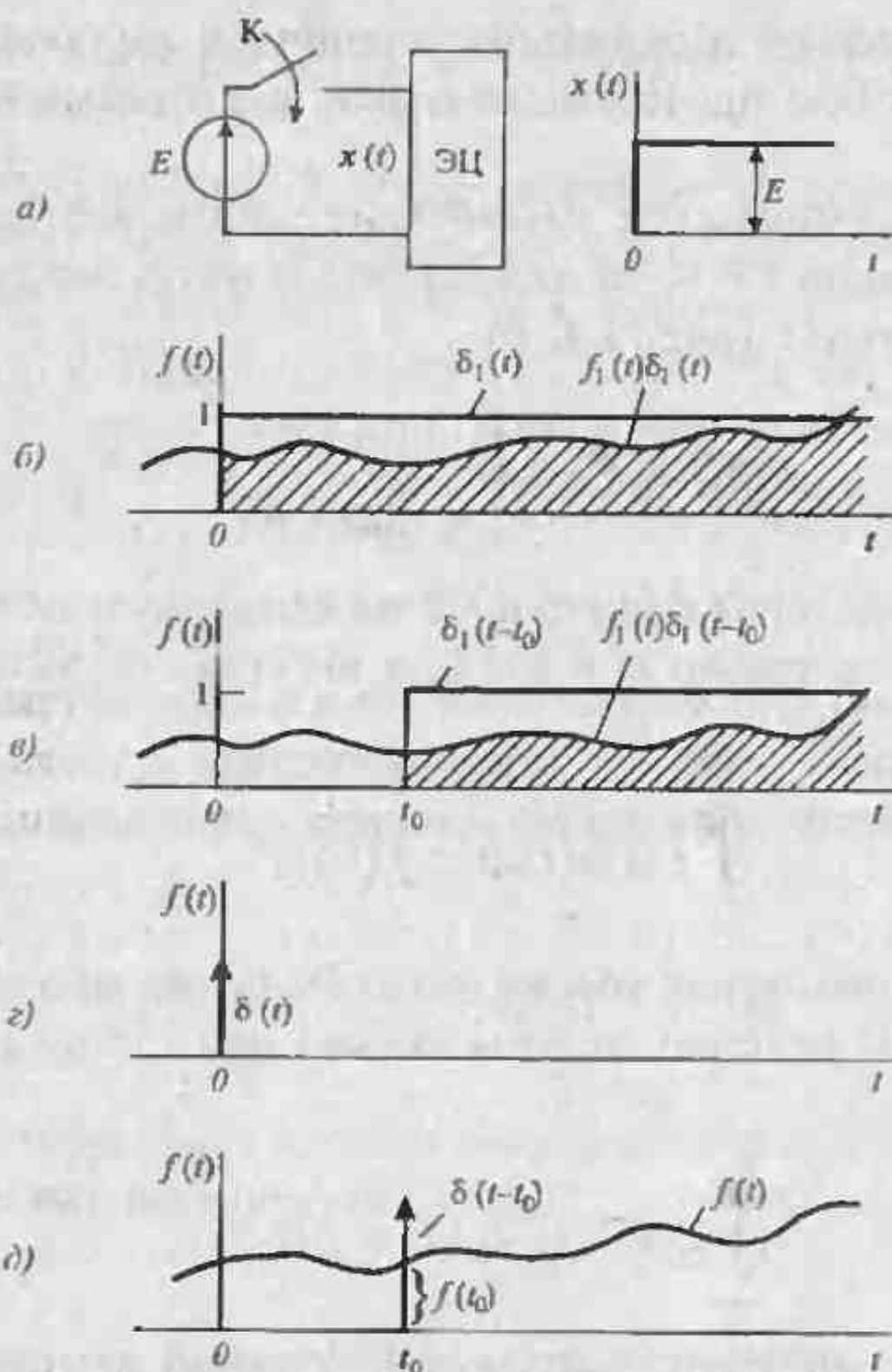


Рис. 5.5. Примеры неперидических воздействий на электрическую цепь: включение ключом (а); единичная функция (б); запаздывающие функции (в); импульсная функция (г); выборка (д)

Как следует из приведенного определения, импульсная функция равна нулю при всех значениях времени t , кроме момента $t = 0$, при котором она обращается в бесконечность

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0, \\ \infty & \text{при } t = 0. \end{cases} \quad (5.22)$$

Единичную импульсную функцию $\delta(t)$ можно рассматривать как производную от единичной ступенчатой функции (5.19):

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \delta_1(t), \quad (5.23)$$

откуда

$$\delta_1(t) = \int \delta(t) dt. \quad (5.23a)$$

Условное графическое изображение единичной импульсной функции приведено на рис 5.5, а. Она представлена в виде вертикальной стрелки, расположенной при $t = 0$.

Если единичное импульсное воздействие запаздывает на время t_0 относительно момента времени $t = 0$, то оно характеризуется запаздывающей единичной импульсной функцией (рис. 5.5, б)

$$\delta_1(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq t_0, \\ \infty & \text{при } t = t_0. \end{cases} \quad (5.24)$$

Произведение некоторой функции $f(t)$ на единичную импульсную функцию (5.22) отлично от нуля только при $t = 0$, а интеграл от этого произведения

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0). \quad (5.25)$$

Аналогично, произведение той же функции $f(t)$ на запаздывающую импульсную функцию (5.24) отлично от нуля только при $t = t_0$, а интеграл от этого произведения

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0). \quad (5.26)$$

Таким образом, умножение импульсной функции на некоторое воздействие $x(t)$ как бы выбирает из него только одно значение, соответствующее моменту действия импульса. Если импульсное воздействие умножают на постоянный коэффициент a , то его площадь в соответствии с (5.21) равна этому коэффициенту:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a\delta(t)dt = a.$$

Импульсные функции используют для характеристики возмущающих воздействий $x(t)$ достаточно малой длительности, когда реакция цепи определяется не формой воздействия, а его площадью $\int x(t)dt$.

Изображение по Лапласу единичной ступенчатой функции имеет вид

$$\mathcal{L}[\delta_1(t)] = \int_0^{\infty} \delta_1(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = 1/s. \quad (5.27)$$

Для определения изображения единичной запаздывающей функции (5.20) можно воспользоваться теоремой смещения в области вещественной переменной t , согласно которой

$$\mathcal{L} [\delta_1(t - t_0)] = e^{-st_0} \mathcal{L} [\delta_1(t)] = e^{-st_0} (1/s). \quad (5.28)$$

Так как для функции $\delta_1(t)$ (5.19) не выполняется условие абсолютной интегрируемости (5.12а), то ее спектральная плотность $\dot{F}_1(j\omega) = \mathcal{F} [\delta_1(t)]$ не может быть найдена подстановкой $s = j\omega$ в формулу (5.27). Для определения $\dot{F}_1(j\omega)$ ступенчатую функцию следует рассматривать как предел экспоненциальной функции e^{-at} при $a \rightarrow 0$. При этом можно показать, что комплексная спектральная плотность

$$\dot{F}_1(j\omega) = \pi\delta(\omega) - j(1/\omega)$$

содержит вещественную часть в виде импульсной функции, которая не оказывает влияния на плотность амплитудного и фазового спектров функции $\delta_1(t)$.

Изображение по Лапласу единичной импульсной функции имеет вид

$$\mathcal{L} [\delta(t)] = \mathcal{L} [(d/dt)\delta_1(t)] = s(1/s) = 1. \quad (5.29)$$

Комплексная спектральная плотность единичного импульсного воздействия может быть определена по формуле (5.29):

$$\dot{F}_\delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1. \quad (5.30)$$

Из выражения (5.30) следует, что спектральная плотность амплитуд единичного импульса постоянна: $|\dot{F}_\delta(\omega)| = 1$, а спектральная плотность начальных фаз $\psi_\delta(\omega) = 0$. Следовательно, единичный импульс включает в себя гармонические сигналы всех частот, имеющие нулевые начальные фазы, амплитуды которых бесконечно малы.

Изображения по Лапласу и Фурье для запаздывающей на время t_0 импульсной функции согласно (5.16) имеют вид

$$\mathcal{L} [\delta(t - t_0)] = e^{-st_0}, \quad \mathcal{F} [\delta(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} = \dot{F}_\delta(j\omega).$$

Таким образом, спектральные плотности амплитуд и начальных фаз запаздывающей импульсной функции имеют значения $|\dot{F}_\delta(j\omega)| = 1$ и $\psi_\delta(\omega) = -\omega t_0$ и изображены на рис. 5.2, б штриховой линией.

Единичные и импульсные функции широко используются в качестве тестовых сигналов в электрических цепях. Реакцию свободной от начального

запаса энергии электрической цепи на единичное ступенчатое воздействие называют *переходной характеристикой* этой цепи и обозначают $h_1(t)$. Аналогично, реакцию свободной от начального запаса энергии цепи на единичное импульсное воздействие называют *импульсной переходной характеристикой* и обозначают $h(t)$. Переходная и импульсная характеристики определяются выражениями $h(t) = dh_1(t)/dt$, $h_1(t) = \int h(t)dt$.

При анализе электрических цепей широко используют *экспоненциальные импульсы* конечной или бесконечной длительности. Экспоненциальный импульс бесконечной длительности записывают в виде:

$$f(t) = e^{\pm at} \delta_1(t). \quad (5.31)$$

Его изображение по Лапласу можно получить по формуле

$$\mathcal{F} [e^{\pm at} \delta_1(t)] = \int_0^{\infty} e^{\pm at} e^{-st} dt = \left| \frac{e^{-(s \mp a)t}}{s \mp a} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s \mp a}. \quad (5.32)$$

Если экспоненциальная функция является убывающей, т.е. $f(t) = e^{-at}$, то она удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости (5.12 а) и может быть преобразована по Фурье, подстановкой в выражение (5.32) значения $s = j\omega$:

$$\dot{F}(j\omega) = \mathcal{F} [e^{-at} \delta_1(t)] = \frac{1}{j\omega + a} = \frac{e^{j\psi(\omega)}}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}. \quad (5.33)$$

Спектральные плотности амплитуд и начальных фаз соответственно равны:

$$F(j\omega) = |\dot{F}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}; \quad \psi(\omega) = \arg \dot{F}(j\omega) = \text{arctg}(-\omega/a).$$

Полагая в этих выражениях $a \rightarrow 0$, найдем спектральные плотности амплитуд и начальных фаз единичной ступенчатой функции: $F_1(\omega) = 1/\omega$; $\psi_1(\omega) = -\pi/2$.

В тех случаях, когда рассматривают включение цепи на гармоническую функцию, воздействие представляют в виде произведения $f(t) = \sin \omega_0 t \cdot \delta_1(t)$. Его можно рассматривать как модуляцию единичным ступенчатым воздействием гармонической функции $\sin \omega_0 t$. Для определения \mathcal{L} -преобразования используем теорему смещения в комплексной области и ее следствия. Так как

$$\mathcal{P}[\delta_1(t)] = F_1(s) = 1/s, \text{ то } F_1(s \pm j\omega_0) = 1/(s \pm j\omega_0)$$

и

$$\mathcal{P}[\sin \omega_0 t \cdot \delta_1(t)] = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0} \right] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad (5.34)$$

Аналогично можно найти изображения гармонических колебаний $\cos \omega_0 t$, модулированных функциями $\delta_1(t)$ и затухающей экспонентой (5.31). Изображение гармонического сигнала (5.34) имеет два сопряженных полюса $s_{1,2} = \pm j\omega_0$, обращающих функцию в бесконечность, расположенных на мнимой оси плоскости s . Если гармонический сигнал затухает (при модуляции затухающей экспонентой e^{-at}), то полюсы изображения перемещаются в левую полуплоскость и $s_{1,2} = -a \pm j\omega_0$ (см. табл. 5.1).

Изображения косинусных колебаний, кроме двух комплексно-сопряженных полюсов, имеют нуль в начале координат плоскости s или на вещественной оси $s = -a$. Таким образом, можно заметить, что расположение нулей и полюсов \mathcal{P} -изображения сигналов непосредственно связано с законом их изменения во времени, и по расположению особых точек $F(s)$ судят о характере изменения сигнала во времени (см. табл. 5.1).

В оптоэлектронных системах часто используются пачки импульсных сигналов, следующих с интервалом T . В этом случае мгновенное значение сигнала можно представить в виде суммы отдельных запаздывающих импульсов:

$$f(t) = f_1(t) + f_1(t - T) + \dots + f_1(t - nT) + \dots, \quad (5.35)$$

где $f_1(t)$ — мгновенное значение одиночного импульса пачки.

Изображение пачки импульсов по Лапласу имеет вид:

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{P}[f(t)] = F_1(s) + F_1(s)e^{-sT} + \dots + F_1(s)e^{-nsT} = \\ &= F_1(s) (1 + e^{-sT} + \dots + e^{-nsT}), \end{aligned} \quad (5.36)$$

где $F_1(s)$ — изображение по Лапласу одиночного импульса пачки.

Если $n \rightarrow \infty$, то для полубесконечной последовательности импульсов получаем:

$$F(s) = F_1(s) \frac{1}{1 - e^{-sT}}, \quad (5.36a)$$

где $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksT} = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$.

ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Лекция 6. Источники напряжения и тока

Моделирование элементов электрической цепи. За последние десятилетия существенно расширилось число элементов электрических цепей. Кроме традиционных пассивных линейных элементов — сопротивления, индуктивности и емкости, появились различные нелинейные элементы: терморезисторы, фоторезисторы, полупроводниковые диоды, стабилитроны, туннельные диоды, вариконды, варикапы и др. Особенно большое значение имело появление многополюсных активных элементов: управляемых источников напряжения и тока, электронных ламп, униполярных и биполярных транзисторов, операционных усилителей, перемножителей напряжений, балансных модуляторов и др.

Для проектирования и расчета сложных электронных схем требуются модели различных элементов. Кроме того, использование ЭВМ для анализа цепей требует разработки специальных моделей нелинейных и управляемых элементов, пригодных для машинного расчета.

При изучении реальных электромагнитных и электронных устройств встает задача описания процессов, происходящих в элементах и узлах, с помощью их математических моделей. В общем случае математическая модель элемента представляет собой любое математическое описание его, с заданной точностью отражающее работу этого элемента в реальном устройстве. Разработка математических моделей реальных элементов ЭЦ является сложной неформализуемой проблемой. Однако для большинства элементов электронно-электротехнических устройств такие модели, удовлетворяющие практическим целям, уже разработаны. В задачи курса электротехники входит ознакомление с имеющимися моделями элементов и определение степени их пригодности для конкретных условий.

Модели элементов могут быть представлены аналитически, графически или с помощью таблиц. Кроме того, по характеру отображаемых процессов их можно разделить на статические и динамические. Аналитические модели представляются в виде алгебраических или дифференциальных уравнений для токов и напряжений (или других интегральных величин).

Графические модели задаются в виде графиков — например, вольтамперных характеристик (ВАХ), или в виде схем замещения. Электрические схемы замещения, составленные из идеальных элементов, приближенно характеризу-

ющие поведение реального устройства по отношению к внешним выводам, являются весьма удобными и распространенными видами моделей. Увеличивая число идеализированных элементов, каждый из которых отображает определенные процессы электромагнитного преобразования, можно повысить точность схемы замещения устройства.

Графическая модель в виде статической характеристики нелинейного элемента определяется экспериментально путем приложения к элементу постоянного напряжения или тока, значения которых регулируют так, чтобы получить все точки характеристики. Для того, чтобы инерционные свойства элемента не влияли на характеристику, ее значения снимают при очень медленном изменении воздействия.

Табличные модели задаются в виде числовых таблиц, обычно соответствующих графикам экспериментальных характеристик, для которых трудно найти аналитическое выражение. Точность моделей оценивается среднеквадратичными отклонениями характеристик модели и реального элемента:

$$\delta = \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_{mj} - y_{zj}}{y_{zj}} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (6.1)$$

где y_{mj} и y_{zj} — ток i или напряжение u модели и реального элемента в j -й точке характеристики.

Статические модели элементов могут использоваться при постоянных и достаточно медленно меняющихся воздействиях. Динамические модели — при быстроизменяющихся и высокочастотных воздействиях.

Активная электрическая цепь кроме пассивных элементов содержит электронные или полупроводниковые приборы, в которых входной сигнал управляет процессом преобразования энергии, поступающей от источников питания. Однако при расчете активных цепей в линейном режиме учитываются только те составляющие токов и напряжений, которые имеют частоту входного сигнала. Учет токов и напряжений, частота которых отличается от частоты входного сигнала, проводится методами теории нелинейных цепей.

Если размеры электронных и полупроводниковых приборов малы по сравнению с длиной волны электромагнитных колебаний, то их можно рассматривать как элементы с сосредоточенными параметрами. В линейном режиме такие элементы можно рассматривать как необратимые многополюсники и описывать их моделями, содержащими управляемые источники напряжения или тока. Все модели активных элементов зависят от режима работы и частотного диапазона.

Линейным активным элементам присущи некоторые свойства, отсутствующие у пассивных элементов. Электрические цепи с активными элементами

способны усиливать электрические сигналы. Мощность на выходе активной цепи может превышать мощность входного сигнала. Процесс усиления включает преобразование энергии сторонних источников питания активных элементов в энергию выходного сигнала.

Модели реальных элементов ЭЦ основываются на использовании понятий идеальных источников и приемников электрической энергии, таких как резистивный, индуктивный и емкостный элементы, а также источников тока и напряжения.

Идеальные активные элементы вводятся для приближенной характеристики свойств источников электрической энергии, в которых преобразуются неэлектрические виды энергии в электрическую. В зависимости от вольт-амперной характеристики различают **идеальные источники напряжения** и **идеальные источники тока**. Если выходное напряжение (или ток) не зависит от токов в других элементах цепи, то такие источники называют *независимыми*. Если же выходное напряжение (или ток) зависят от напряжения или тока в каком-либо другом элементе электрической цепи, то такие источники называют *зависимыми* или *управляемыми*.

Независимый идеальный источник напряжения представляет собой двухполюсный элемент, напряжение на выходе которого $e(t)$ не зависит от тока, проходящего через источник.

Условные обозначения идеальных источников напряжения и тока приведены на рис. 6.1, а, б, а их вольт-амперные характеристики — на рис. 6.1, в. В этих условных обозначениях учтены особенности идеальных источников. Если напряжение идеального источника $e = 0$, то он заменяется проводником, поэтому линия внутри источника непрерывная. Если же ток идеального источника $j = 0$, то он заменяется разрывом ветви, поэтому линия внутри источника прерывистая.

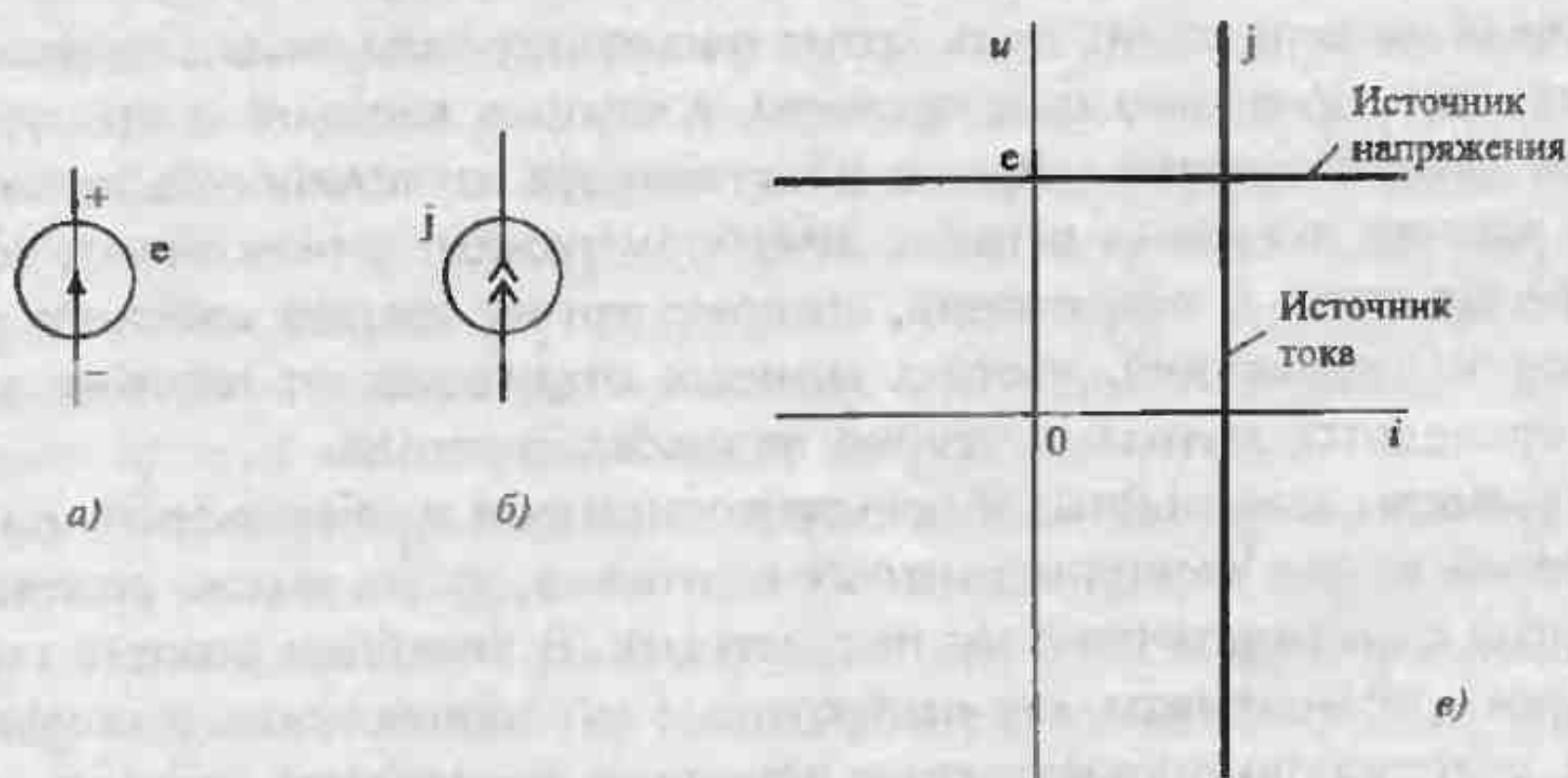
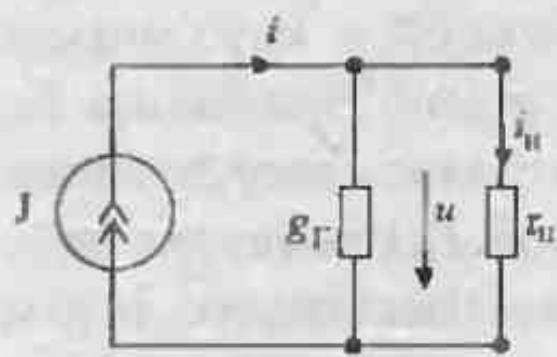


Рис. 6.1. Условные обозначения идеальных источников напряжения (а), тока (б) и их вольт-амперные характеристики (в)

а)



б)

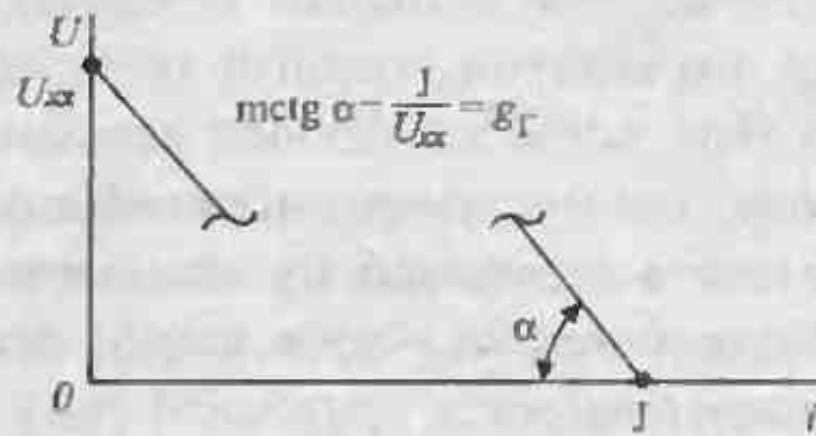
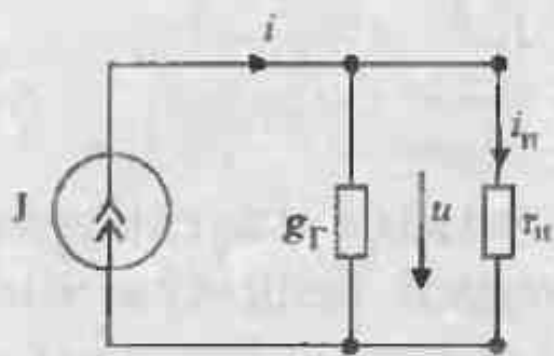


Рис. 6.2. Реальный источник напряжения (а) и его нагрузочная характеристика (б).

а)



б)

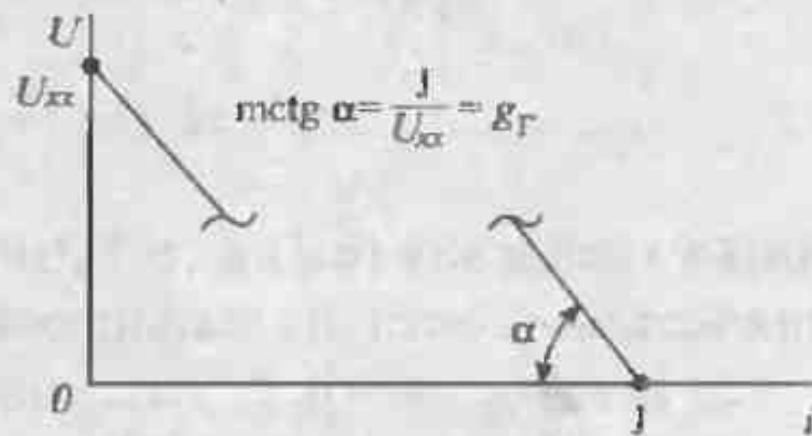


Рис. 6.3. Реальный источник тока (а) и его нагрузочная характеристика (б).

Положительное направление источника (полярность источника) указывается стрелкой или знаками плюс и минус.

Поскольку напряжение на выходе идеального источника напряжения не зависит от значения тока, то в режиме короткого замыкания внешних зажимов, от источника потребляется бесконечно большой ток и он должен генерировать бесконечно большую мощность, однако реальные источники напряжения имеют конечную мощность. Поэтому, чтобы приблизить свойства идеального источника к реальному, в модели последовательно с источником включается сопротивление r , характеризующее ток короткого замыкания $i_{кз} = e/r_r$ (рис. 6.2, а). Во многих случаях, когда внешняя нагрузка источника $r_n \gg r_r$, внутреннее сопротивление источника можно не учитывать. Выходное (внутреннее) сопротивление идеального источника напряжения $r_r = 0$.

Напряжение на выходе реального источника напряжения с внутренним сопротивлением r_r зависит от тока i , который от него потребляется. В соответствии со схемой рис. 6.2, а напряжение реального источника

$$u = e - r_r i \quad (6.2)$$

Независимый идеальный источник тока представляет собой двухполюсный активный элемент, ток j на выходе которого имеет некоторый определенный закон изменения во времени, не зависящий от напряжения на источнике (см. рис. 6.1, б). Положительное направление тока (полярность источника) указывается стрелкой и

соответствует интервалам времени, на которых $j > 0$. Идеальный источник тока обладает бесконечно большим внутренним сопротивлением, поэтому ток j не зависит от параметров внешней цепи, присоединенной к источнику. В режиме холостого хода, когда к внешним зажимам присоединено бесконечно большое сопротивление, ток идеального источника должен сохранить свое значение, а напряжение на нем и отдаваемая им мощность стремятся к бесконечности.

Реальные источники тока имеют ограниченную мощность, и в модели такого источника имеется проводимость g_r , учитывающая внутренние параметры источника и ограничивающая напряжение на нем в режиме холостого хода $u_{xx} = Jg_r^{-1}$. В соответствии со схемой рис. 6.3, а ток на выходе реального источника зависит от напряжения на его зажимах $J = ug_r + i_n$.

Напряжение на зажимах реального источника тока при токе i_n в цепи нагрузки

$$u = (J - i_n)/g_r \quad (6.3)$$

Сравнивая уравнения (6.2) и (6.3), можно убедиться в идентичности источников напряжения и тока по отношению к внешней цепи при выполнении условий $i = i_n$, $r_r = 1/g_r$, $e = r_r J$. Это означает, что реальный источник напряжения всегда можно заменить эквивалентным реальным источником тока, если параметры моделей рис. 6.2, а и 6.3, а выбрать равными

$$r_r = 1/g_r, J = e/r_r \quad (6.4)$$

Источники постоянного напряжения E или тока J генерируют неизменное во времени напряжение или ток. Их вольт-амперные (внешние) характеристики с учетом внутренних падений напряжений изображены на рис. 6.2, б и 6.3, б. Напряжения на режимах источника постоянного напряжения и тока в режиме холостого хода при $i_n = I_n = 0$ соответственно равны:

$$\begin{cases} U_{xx} = E, \\ U_{xx} = Jr_r. \end{cases} \quad (6.5)$$

Источники гармонических напряжения \dot{E} и тока \dot{J} могут характеризоваться комплексным внутренним сопротивлением Z_r или проводимостью $Y_r = 1/Z_r$. При этом уравнения выходных напряжений источников (6.2) и (6.3) и условия их эквивалентной замены (6.4) должны быть записаны в комплексной форме:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{E} - Z_r \dot{I}, \\ \dot{U} = Z_r (\dot{J} - \dot{I}_n) = (\dot{J} - \dot{I}_n)/Y_r, \end{cases} \quad (6.6)$$

$$\begin{cases} Z_r = 1/Y_r, \\ jZ_r = \dot{E}. \end{cases} \quad (6.7)$$

Идеальные управляемые источники напряжения и тока представляют собой четырехполюсные или трехполюсные необратимые элементы. В зависимости от управляющей величины различают источники, управляемые напряжением и током (рис. 6.4 а-г).

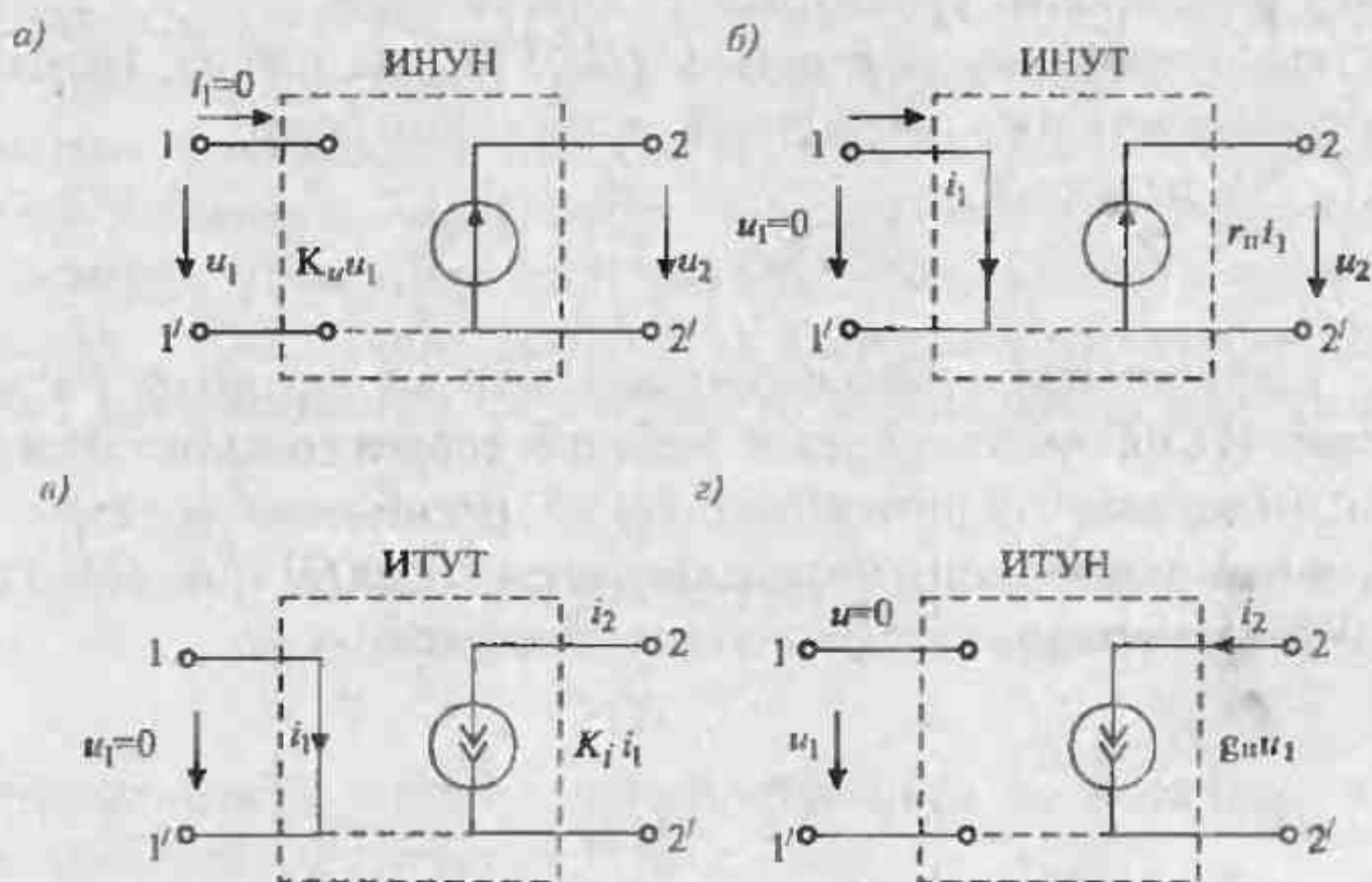


Рис. 6.4. Условные обозначения управляемых источников: ИМУН (а); ИМУТ (б); ИТУТ (в); ИТУН (г).

Выходные цепи идеальных управляемых источников обладают свойствами либо идеального источника напряжения, либо идеального источника тока. Таким образом, в зависимости от свойств выходной цепи и управляющего сигнала различают четыре вида идеальных управляемых источников.

Источник напряжения, управляемый напряжением (ИМУН) (рис. 6.4, а). Выходное напряжение u_2 ИМУН управляется напряжением на входе u_1 и имеет значение

$$u_2 = K_u u_1, \quad (6.8)$$

где $K_u = u_2/u_1$ — безразмерный коэффициент передачи напряжения от входа 1 к выходу 2.

Входная цепь ИМУН имеет бесконечно большое входное сопротивление и ток управления $i_1 = 0$. При этом мощность управления $P_1 = u_1 i_1 = 0$. Выходное сопротивление ИМУН, как и у идеального источника напряжения, равно нулю.

Источник напряжения, управляемый током (ИНУТ) (рис. 6.4, б). Выходное напряжение u_2 ИНУТ управляется током входной цепи i_1 и имеет значение

$$u_2 = r_n i_1, \quad (6.9)$$

где $r_n = u_2/i_1$ — коэффициент передачи источника, имеющий размерность сопротивления и называемый сопротивлением передачи от входа 1 к выходу 2.

Входная цепь ИНУТ замкнута накоротко, поэтому входное напряжение u_1 , а следовательно, и мощность управления P_1 равны нулю.

Источник тока, управляемый током (ИТУТ) (рис. 6.4, в). Выходной ток ИТУТ i_2 пропорционален току во входной цепи i_1 , поэтому

$$i_2 = K_i i_1 \quad (6.10)$$

где $K_i = i_2/i_1$ — безразмерный коэффициент передачи тока от входа 1 к выходу 2.

Входная цепь ИТУТ имеет нулевое входное сопротивление, поэтому u_1 и P_1 равны нулю. Выходное сопротивление ИТУТ бесконечно велико.

Источник тока, управляемый напряжением (ИТУН) (рис. 6.4, г). Выходной ток i_2 ИТУН пропорционален входному напряжению u_1

$$i_2 = g_n u_1, \quad (6.11)$$

где $g_n = i_2/u_1$ — коэффициент, имеющий размерность проводимости или называемый проводимостью передачи от входа 1 к выходу 2.

Входное сопротивление ИТУН равно бесконечности, входной ток $i_1 = 0$ и $P_1 = u_1 i_1 = 0$. Выходное сопротивление ИТУН, как и идеального источника тока, равно бесконечности.

Таким образом, все идеальные управляемые источники являются элементами однонаправленного действия и обладают следующими свойствами:

- входные и выходные сопротивления их равны нулю и бесконечности,
- мощность на входе (мощность управления) равна нулю,
- выходная величина (ток или напряжение) пропорциональна соответствующей входной величине. Управляемые источники являются безынерционными элементами, в которых выходная величина (реакция) $y(t)$ имеет ту же форму, что и входное возмущение $x(t)$.

$$y(t) = kx(t).$$

Реальные управляемые источники имеют небольшой, но конечный коэффициент обратной передачи, а также входные и выходные сопротивления, отличные от 0 или ∞ . Кроме того, параметр прямой передачи в реальных УИ может быть частотно-зависимой величиной.

Лекция 7. Резистивные элементы в электрической цепи

Пассивные элементы электрической цепи используются для описания процесса преобразования электрической энергии в какой-либо другой вид энергии, а также для характеристики процессов накопления энергии в электрическом или магнитном полях. Каждый из идеализированных пассивных элементов связан лишь с одним видом преобразования или накопления электромагнитной энергии.

Резистивный элемент, характеризуемый активным сопротивлением (или проводимостью), представляет собой идеализированный элемент, в котором происходит только необратимый процесс преобразования электромагнитной энергии в другой вид энергии, например в тепловую. Математическая модель резистивного элемента устанавливается законом Ома, согласно которому активное сопротивление r (или проводимость g) является параметром, определяющим связь между воздействием в виде тока $i(t)$ и реакцией в виде напряжения $u(t)$:

$$u(t) = ri(t) = \frac{1}{g}i(t). \quad (7.1)$$

Электромагнитная энергия, преобразованная в резисторе в другой вид энергии в интервале времени от 0 до t :

$$W_r = \int_0^t p_r dt = \int_0^t ri^2 dt = \int_0^t gu^2 dt. \quad (7.2)$$

Сопротивление линейного резистора $r = 1/g = \text{const}$ (рис.7.1, а) неизменно во времени, сопротивление параметрического резистора изменяется во времени по некоторому закону $r(t)$ (рис.7.1, б), а сопротивление *нелинейного резистора* является функцией приложенного к нему напряжения или тока (рис.7.1, в): $r = f_1(u)$ или $r = f_2(i)$.

Принадлежность резистора к тому или иному классу определяется его ВАХ $u(i)$. Для линейных и параметрических резисторов ВАХ является прямой линией (рис.7.1, з), которая характеризуется одним параметром r или $g = i/u = \text{tg}\alpha$, где m — масштабный коэффициент; α — угол наклона ВАХ $u(i)$ к оси абсцисс. Сопротивление и проводимость линейного резистора, поскольку ток и напряжение в нем совпадают по направлению, всегда положительны ($r > 0$, $g > 0$).

Состояние резистивного элемента, являющегося безынерционным, в электрической цепи, состоящей только из резистивных элементов, определяется в каждый момент времени только входным возмущением в тот же момент време-

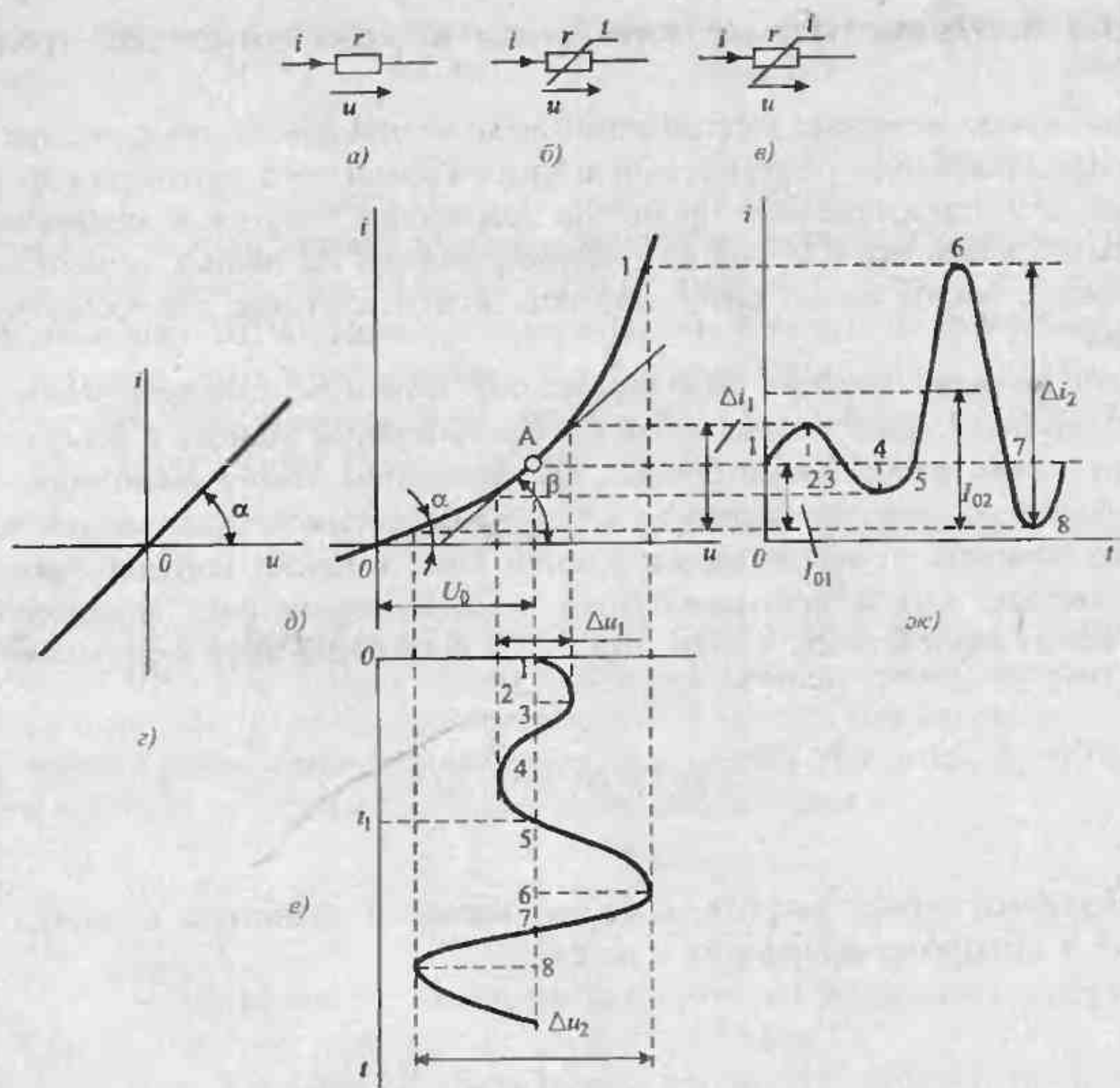


Рис. 7. 2. Линейное (а), параметрическое (б) и нелинейное сопротивление, формы воздействия и реакции (д, е, ж)

ни, и резистивные цепи характеризуются алгебраическими уравнениями (линейными или нелинейными). Для цепей, содержащих только линейные резисторы, справедливо уравнение (7.1) при различных видах воздействий.

В случае гармонического возмущения, заданного в комплексной форме, $\dot{I} = I e^{j\omega t}$, реакция

$$\dot{U} = r\dot{I}. \quad (7.3)$$

Временные диаграммы гармонических функций u и i совпадают по фазе (рис.7.2, а,б), и согласно (7.1)

$$u = rI_m \cos(\omega t), \quad (7.3a)$$

где $rI_m = U_m$ — амплитуда напряжения на резисторе.

Мгновенная мощность, рассеиваемая в резисторе,

$$p = ui = \frac{U_m I_m}{2} (1 + \cos 2\omega t) = P + p_- \quad (7.4)$$

имеет постоянную (среднюю за период) составляющую $P = U_m I_m / 2$ и переменную составляющую p_- , изменяющуюся с удвоенной частотой 2ω , причем $p \geq 0$ (рис. 7.2, б).

При полигармонических воздействиях, заданных в комплексной форме (4.7), реакция определяется выражением

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{U}_{mk} e^{jk\omega_1 t} = r \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{I}_{mk} e^{jk\omega_1 t} \quad (7.5)$$

Для сложных непериодических возмущений, заданных спектральной плотностью (5.2) $\dot{I}(j\omega)$, спектральная плотность реакции

$$\dot{U}(j\omega) = r\dot{I}(j\omega). \quad (7.6)$$

Если же возмущение $I(s)$ задано в операторной форме (5.6), то \mathcal{L} -изображение реакции на комплексной плоскости

$$U(s) = rI(s). \quad (7.7)$$

Выражения (7.3)–(7.7) показывают, что в линейных резистивных элементах при любых воздействиях формы возмущений и реакций всегда совпадают. Линейные резисторы являются наиболее распространенным элементом электротехнических устройств и электронных схем. Различают проволочные, металлопленочные, металлооксидные, угольнопленочные, объемные, прессованные и другие типы резисторов.

Нелинейные резисторы имеют разнообразные ВАХ (рис. 7.1, д и 7.3, а), которые могут быть описаны выражениями

$$i = g(u) \quad u = \frac{1}{r(u)} i \quad (7.8)$$

или

$$u = r(i) \quad i = \frac{1}{g(i)} u \quad (7.9)$$

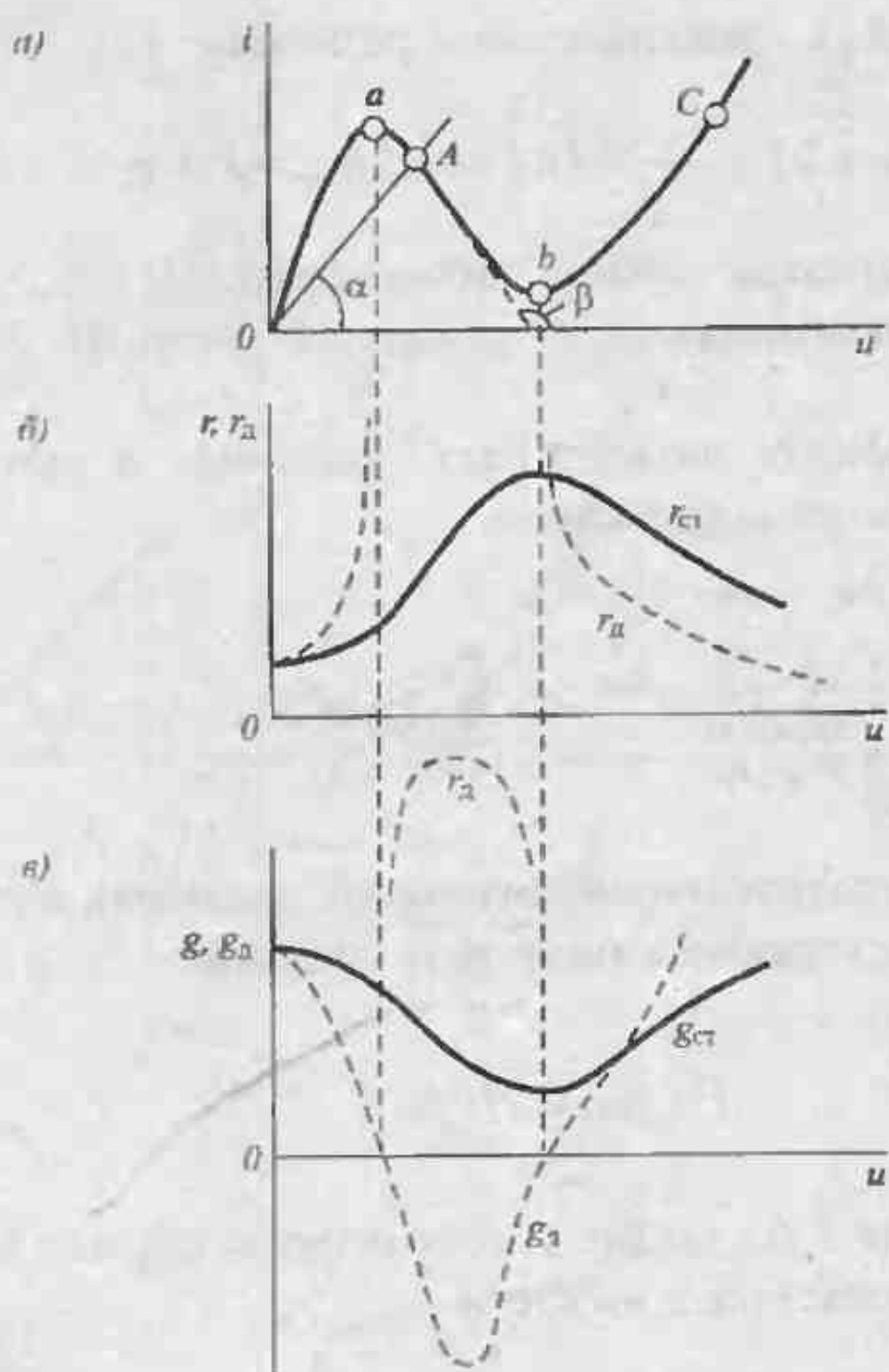


Рис. 7.3. ВАХ нелинейного сопротивления (а), его статические и дифференциальные характеристики (б, в)

В зависимости от режима работы они могут характеризоваться статически или дифференциальными сопротивлениями (или проводимостями). *Статическое сопротивление* (сопротивление постоянному току) характеризует резистор в некоторой точке ВАХ (см. рис. 7.1, д), оно всегда положительно и определяет угловое положение рабочей точки (например, точки A) ВАХ относительно начала координат:

$$r_{ст} = 1 / g_{ст} = u / i = m \operatorname{ctg} \alpha. \quad (7.10)$$

Дифференциальное сопротивление (сопротивление переменной составляющей тока) и проводимость определяют как производную функции, характеризующей ВАХ нелинейного резистора (см. рис. 7.1, д):

$$r_d = du / di = m \operatorname{ctg} \beta = 1 / g_d. \quad (7.11)$$

Дифференциальное сопротивление r_d (или проводимость g_d) определяет отношение между переменными составляющими токов и напряжений в нелинейном резисторе, если размах этих переменных составляющих (Δu и Δi) настолько мал, что допускает линеаризацию ВАХ на рассматриваемом участке. На рис. 7.1, е представлено напряжение, приложенное к нелинейному резистору:

$$u(t) = U_0 + \Delta u(t) = U_0 + \frac{\Delta u}{2} \sin \omega t.$$

Реакцию нелинейного резистора, которой в данном случае является ток i , определяют графически путем сноса точек (например, точек 1–6) через ВАХ элемента (см. рис. 7.1, д) на плоскость $\Delta i(t)$ (см. рис. 7.1, ж). Размах переменной составляющей возмущения Δu изменяется в момент времени $t = t_1$ (см. рис. 7.1, е). В интервале времени $0 - t_1$ размах переменной составляющей Δu_2 невелик. При этом для отыскания реакции можно пользоваться не ВАХ элемента, а прямой, касательной к ВАХ в точке А, которая соответствует начальному смещению U_0 . Это означает, что переменная составляющая реакции Δi_1 определяется через дифференциальную проводимость $g_d = \operatorname{tg} \beta$ и

$$\Delta i = g_d \Delta u. \quad (7.12)$$

Реакция $i(t)$ в интервале $0 - t_1$ по форме совпадает с возмущением. Она также имеет некоторую постоянную I_0 и переменную $\Delta i_1(t)$ составляющие. При $t > t_1$ размах переменной составляющей входного возмущения Δu_2 увеличивается и расчет реакции с использованием дифференциальной проводимости g_d дает существенную погрешность (штриховая линия на рис. 7.1, ж). В таком случае для определения $i(t)$ следует пользоваться ВАХ нелинейного резистора. Отметим, что при заметной нелинейности ВАХ и значительном размахе переменной составляющей возмущения реакция нелинейной резистивной цепи может существенно отличаться по форме от входного сигнала. Спектр реакции обогащается высшими гармоническими составляющими, которые во входном возмущении отсутствуют. Это показывает, что нелинейные резисторы могут служить в качестве элементов, преобразующих форму входного сигнала.

Постоянная составляющая напряжения U_0 на обоих временных интервалах $0 \leq t \leq t_1$ и $t > t_1$ одинакова (см. рис. 7.1, е), постоянная же составляющая реакции на втором участке $I_{02} > I_{01}$ (см. рис. 7.1, ж). Таким образом, величина постоянной составляющей реакции нелинейного резистора зависит от размаха переменной составляющей входного возмущения. Это явление используют при обработке модулированных сигналов.

Реальные резистивные элементы, например туннельные диоды, могут иметь ВАХ с участками отрицательного дифференциального сопротивления, подобную изображенной на рис. 7.3, а. Статические сопротивления (проводимо-

сти) нелинейного резистора $r_{ст}$ или $g_{ст}$ положительны при любых напряжениях, зависимости же дифференциальных параметров $r_d(u)$ и $g_d(u)$ имеют точки a и b на рис. 7.3,а, в которых они принимают бесконечно большие или нулевые значения, а также участки $a-b$ отрицательного сопротивления (рис. 7.3,б,в). Положительное дифференциальное сопротивление (или проводимость) на некотором участке ВАХ свидетельствует о том, что резистор, работающий на переменном токе в пределах этого участка, является потребителем мощности переменного тока. Если же он работает на участке с отрицательным сопротивлением, то он является источником энергии переменного тока.

При расчете цепей с нелинейными резисторами в качестве независимой переменной целесообразно выбирать ту, которая обеспечивает однозначность ВАХ при изменении этой переменной. Так, ВАХ туннельного диода (рис. 7.3,а) выгодно представить как $i = g(u)u$, поскольку зависимость $u = r(i)i$ не является однозначной на участке $a-b$.

Лекция 8. Индуктивные элементы в электрической цепи

Индуктивные элементы представляют собой идеализированные элементы, аналогичные по свойствам индуктивной катушке, в которой возбуждается магнитное поле, характеризуемое магнитным потоком Φ и соответствующим ему потокосцеплением Ψ (рис. 8.1,а). Идеальный индуктивный элемент можно представить в виде сверхпроводящей катушки, сопротивление которой равно нулю. В индуктивном элементе происходит *запасание энергии магнитного поля*. Если все линии вектора магнитной индукции B связаны со всеми w витками катушки (рис. 8.1,а), то потокосцепление $\Psi = w\Phi = w\mathbf{B}d\mathbf{S}$.

Если поле имеет более сложную конфигурацию, то для расчета потокосцепления можно разделить общий поток Φ на n потоков Φ_k , каждый из которых связан с витками катушки w (рис. 8.1,б). Тогда потокосцепление Ψ определяется по формуле

$$\Psi = \sum_{k=1}^n w_k \Phi_k. \quad (8.1)$$

Магнитное поле катушки с потокосцеплением Ψ , обтекаемой током i , является носителем энергии магнитного поля

$$W_m = \frac{i\Psi}{2} = \int_V \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} dV. \quad (8.2)$$

Индуктивность элемента характеризуется отношением потокосцепления к возбуждающему поле току:

$$L = \psi / i. \quad (8.3)$$

В зависимости от вебер-амперной характеристики (ВБАХ) $\Psi = f(i)$ (рис. 8.1, е, ж) индуктивный элемент может быть линейным (рис. 8.1, е), если $L = \text{const}$, параметрическим, если его индуктивность $L(t)$ изменяется во времени, и нелинейным, когда $L = f(i)$ (рис. 8.1, ж). Условные обозначения этих индуктивных элементов даны на рис. 8.1, в-д.

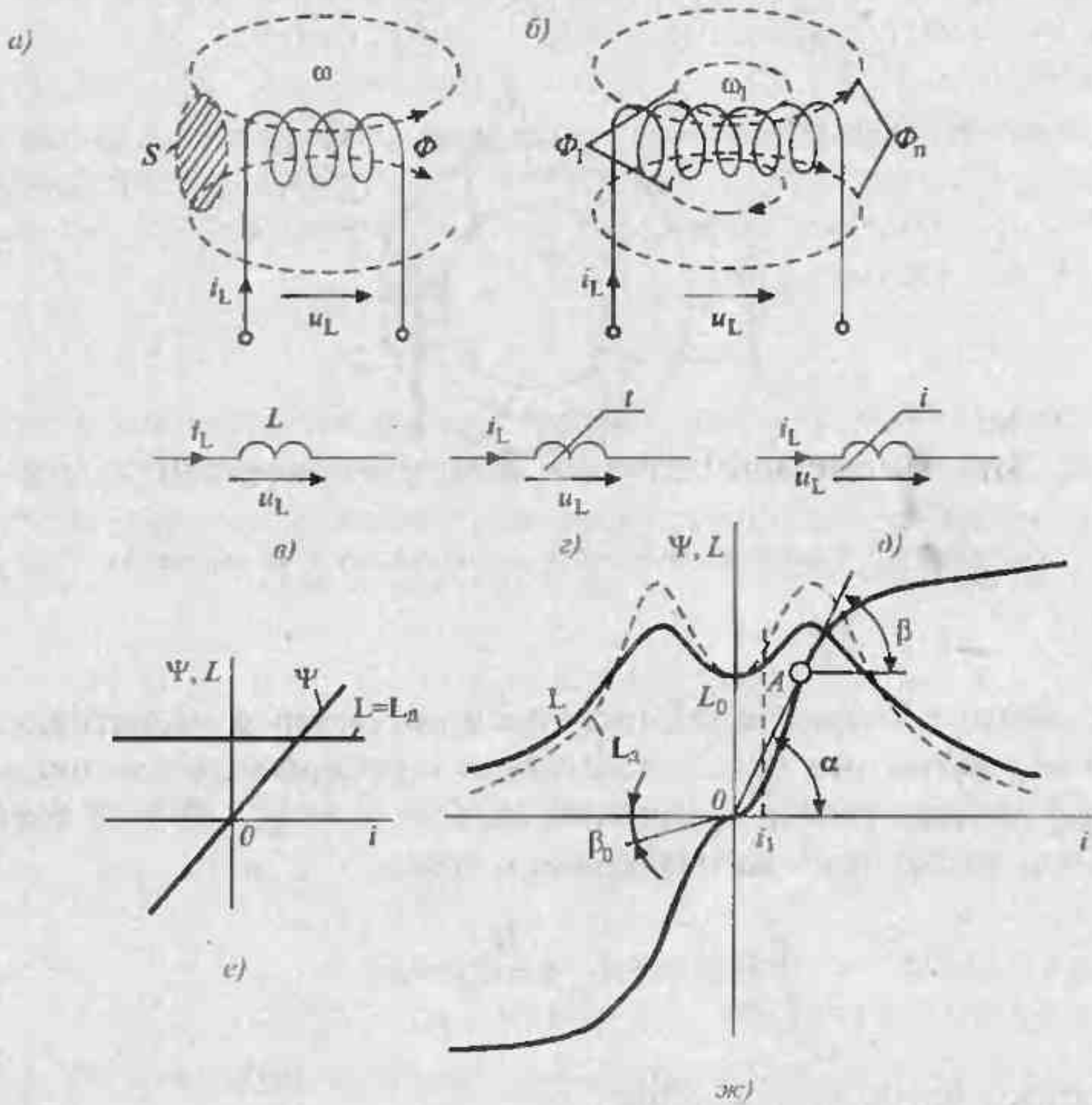


Рис. 8. 1. Изображение катушки индуктивности (а, б); условные обозначения (в, з, д); линейная ВБАХ (е) и нелинейная ВБАХ (ж)

ВБАХ нелинейной индуктивности может быть описана двумя параметрами, зависящими от тока или потокосцепления: *статической индуктивностью* (рис. 8.1, ж)

$$L_{ст}(i) = \psi / i = m \operatorname{tg} \alpha. \quad (8.3a)$$

и *дифференциальной индуктивностью* (рис. 8.1, ж)

$$L_d = d\psi / di = m \operatorname{tg} \beta. \quad (8.3б)$$

Первый параметр используют обычно для расчета цепей с катушками при постоянных возмущениях, а второй — при переменных и достаточно малых по амплитуде возмущениях. Так, если в катушке $i < i_1$, то она может быть охарактеризована начальной дифференциальной индуктивностью (рис. 8.1, жс): $L_0 = (d\Psi/di)_{i=0} = m \operatorname{tg}\beta_0$. Индуктивность катушки определяется ее геометрическими размерами, числом витков и магнитной проницаемостью среды, в которой существует ее магнитное поле. Предположим, что обмотка с числом витков w равномерно распределена по кольцевому сердечнику (рис. 8.2) из материала

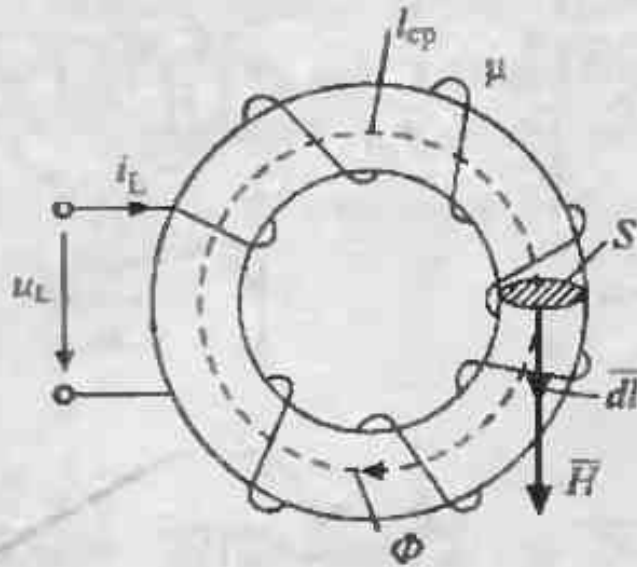


Рис. 8.2. Торoidalная катушка индуктивности и ее параметры

(например, магнетодизэлектрика), имеющего постоянную магнитную проницаемость μ . Если магнитное поле в сердечнике с поперечным сечением S и средней длиной силовой линии l_{cp} однородно, т. е. векторы \mathbf{H} и $d\mathbf{l}$ совпадают по направлению, то согласно закону полного тока

$$\oint_{l_{cp}} \mathbf{H} d\mathbf{l} = H l_{cp} = \frac{B}{\mu} l_{cp} = iw$$

Магнитный поток в сердечнике

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = BS = \frac{\mu S}{l_{cp}} iw. \quad (8.4)$$

Отношение потока к магнитодвижущей силе $F = iw$ называют магнитной проводимостью для постоянного потока:

$$G_m = \Phi/F = \mu S/l_{cp} = 1/R_m, \quad (8.4a)$$

где R_m — магнитное сопротивление сердечника постоянному или медленно изменяющемуся потоку.

Индуктивность такой катушки (статическая индуктивность)

$$L = \Psi / i = w\Phi / i = w^2 \mu S / l_{\text{ср}}. \quad (8.5)$$

Напряжение на зажимах индуктивного элемента и потокосцепление согласно уравнению Максвелла (1.6) связаны соотношением

$$u_L = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = \frac{dL}{dt}i + L \frac{di}{dt}. \quad (8.6)$$

Напряжение u_L может быть выражено также через дифференциальную индуктивность L_n (8.3б):

$$u_L = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\Psi}{di} \frac{di}{dt} = L_n \frac{di}{dt}. \quad (8.6a)$$

Эти уравнения являются математической моделью индуктивного элемента, связывающего возмущение (например, u_L) и реакцию (i или Ψ). Из них может быть получена формула, связывающая дифференциальную и статическую индуктивности:

$$L_n = L + i \frac{dL}{di}. \quad (8.6b)$$

С учетом выражения (8.6a) мгновенная мощность индуктивного элемента (5.5) равна:

$$p = u_L i = \frac{d\Psi}{dt} i = L_n i \frac{di}{dt}. \quad (8.7)$$

Индуктивный элемент является *инерционным звеном* и для расчета его реакции необходимо знать начальный запас энергии в нем. Действительно, согласно (8.3)

$$i = \frac{\Psi}{L(\Psi)} = \frac{1}{L(\Psi)} \left[\Psi(0) + \int_0^{\Delta t} u_L(t) dt \right]. \quad (8.8)$$

Эта формула удобна для расчета цепей с нелинейной индуктивностью численными методами на ЭВМ. Если выбрать достаточно малый шаг интегрирования во времени Δt , в пределах которого приращение $\Delta\Psi$ настолько мало, что значение $L(\Psi)$ может быть принято на n -м шаге постоянным и равным L_n , то задача определения реакции линеаризуется.

Индуктивность L физического элемента всегда положительна. Для цепей с линейными индуктивными элементами $L = \text{const}$ задача расчета реакции упрощается. В этом случае, согласно (8.6), (8.8)

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (8.9)$$

и

$$i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt. \quad (8.10)$$

Используя выражение (8.10), найдем ток в индуктивном элементе, в котором $i_L(0) = 0$, при приложении импульса напряжения $a\delta(t)$ и ступенчатого напряжения $E\delta_1(t)$.

Импульсная характеристика индуктивности (5.25)

$$h_i(t) = \frac{1}{aL} \int_0^t a\delta(t) dt = \frac{1}{L} \delta_1(t), \quad (8.11)$$

переходная характеристика индуктивности по току

$$h_{iv}(t) = \frac{1}{EL} \int_0^t E dt = \frac{t}{L}. \quad (8.11a)$$

Таким образом, при приложении импульса напряжения к катушке ток в ней нарастает мгновенно, а затем остается неизменным (рис. 8.3, а). Если на вход индуктивного элемента подается ступень напряжения, то ток i_L во времени возрастает линейно $i_L = Et/L$ (рис. 8.3, б).

Воспользуемся полученными формулами для расчета реакции тока в индуктивном элементе при действии на его зажимах серии знакопостоянных импульсов напряжения прямоугольной формы $u_L(t)$ относительной продолжительности $\gamma = t_1/T = 0,5$ (рис. 8.3, в):

$$u_L(t) = \begin{cases} U = \text{const} & \text{на интервалах } nT \leq t \leq (n+1/2)T, \\ 0 & \text{на интервалах } (n+1/2)T \leq t \leq (n+1)T. \end{cases}$$

Ток $i_L(0) = 0$, поэтому в течение действия первого импульса напряжения $0 \leq t \leq t_1 = T/2$ ток i_L возрастает по линейному закону (8.11, а), и к моменту времени $t = T/2$ он достигает значения (рис. 8.3, в) $i_L(T/2) = UT/(2L) = U\pi/(\omega L) = I_1 = \Delta I$.

На интервале паузы $T/2 \leq t \leq T$ напряжение $u_L = 0$, однако цепь катушки остается замкнутой, ее сопротивление $r = 0$ и ток в ней сохраняет прежнее

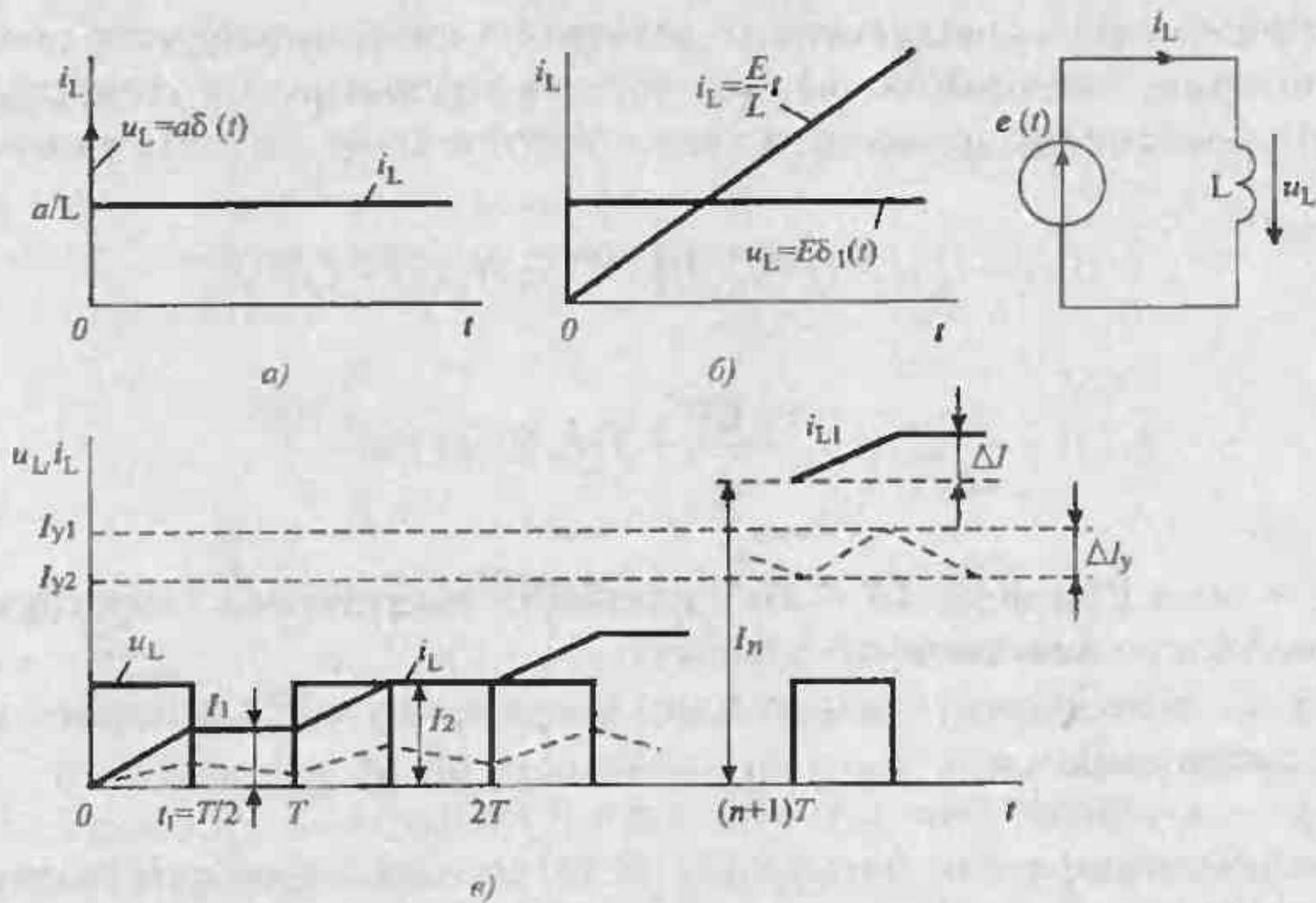


Рис. 8.3. Импульсная (а) и переходная (б) характеристики индуктивности, процессы в индуктивности при периодической последовательности прямоугольных импульсов (в)

значение, так как энергия поля W_m не рассеивается. Очевидно ток $i(T) = I_1$ будет начальным током во втором периоде $T \leq t \leq 2T$, в течение которого

$$i(t) = \begin{cases} I_1 + \frac{U}{L}t' & \text{при } 0 \leq t' \leq t - T \leq T/2, \\ I_2 = 2I_1 & \text{при } T/2 \leq t' \leq T. \end{cases}$$

Процесс накопления энергии W_m будет продолжаться при действии следующих импульсов напряжения и при $t \rightarrow \infty$, $i_L(\infty) \rightarrow \infty$, $W_m(\infty) \rightarrow \infty$. Таким образом, индуктивная катушка без потерь при действии возмущения в виде напряжения является идеальным интегрирующим элементом, если под реакцией подразумевать ток в ней (8.10). В реальных катушках бесконечный процесс накопления энергии невозможен из-за потерь энергии в обмотке, соединительных проводах и в среде, в которой распространяется магнитное поле.

Поэтому в условиях действия знакопостоянных импульсов напряжения ток в ней стремится к некоторым конечным значениям I_{y1} , I_{y2} (штриховые линии на рис. 8.3, в), определяемым активным сопротивлением контура катушки и относительной продолжительностью импульсов напряжения $\gamma = t_1/T$. Широтно-импульсный способ регулирования значения тока в контурах с индуктивностями широко используется в импульсных регуляторах тока различных электромагнитных устройств и электрических машин.

Модели линейного индуктивного элемента в виде операторных схем замещения получим, преобразовав по Лапласу дифференциальные уравнения (8.9), (8.10). Изображения напряжения и тока в индуктивном элементе таковы:

$$U_L(s) = L[sI_L(s) - i_L(0)] = Z_L(s)I_L(s) - Li_L(0), \quad (8.12)$$

$$I_L(s) = \frac{1}{sL}U_L(s) + \frac{i_L(0)}{s} = Y_L(s)U_L(s) + \frac{i_L(0)}{s}, \quad (8.13)$$

где $Z_L(s) = sL$ и $Y_L(s) = 1/(sL)$ — соответственно операторное сопротивление и проводимость индуктивного элемента;

$Li_L(0)$ — \mathcal{T} -изображение импульсного напряжения, обусловленного начальным током $i_L(0)$;

$i_L(0)/s$ — \mathcal{T} -изображение ступени тока $i_L(0)\delta_1(t)$.

Алгебраическим уравнениям (8.12), (8.13) соответствуют операторные схемы замещения индуктивного элемента, изображенные на рис. 8.4, а, б, для которых уравнения Кирхгофа, составленные для $U_L(s)$ (рис. 8.4, а) и $I_L(s)$ (рис. 8.4, б), совпадают с исходными уравнениями. Операторные схемы замещения принимают при расчете реакций в цепях с индуктивными элементами практически при любых формах воздействий.

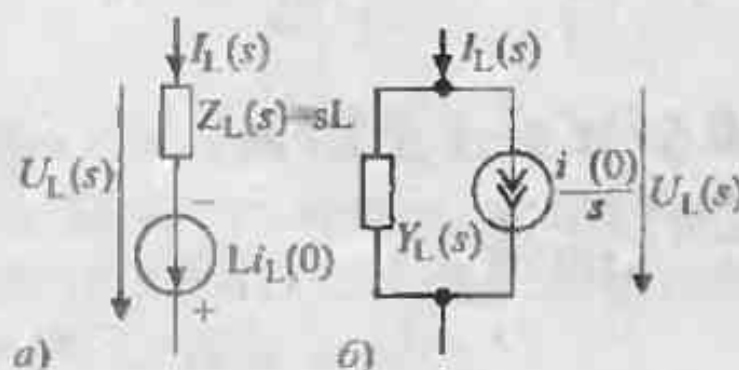


Рис. 8.4. Операторные схемы замещения индуктивности: последовательная (а) и параллельная (б)

Для расчета установившихся реакций при гармоническом воздействии целесообразно использовать метод комплексных амплитуд. Их можно получить также из операторных уравнений (8.12), (8.13), если учесть, что начальный запас энергии в индуктивности не влияет на установившийся режим, и положить соответствующие слагаемые, содержащие $i_L(0)$, равными нулю, а комплексную переменную $s = j\omega$. Полученные таким образом выражения для комплексов напряжения и тока в индуктивном элементе имеют вид

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L = jx_L \dot{I}_L = Z_L \dot{I}_L, \quad (8.14)$$

$$\dot{I}_L = \frac{1}{j\omega L} \dot{U}_L = jb_L \dot{U}_L = Y_L \dot{U}_L, \quad (8.15)$$

где $x_L = \omega L$ — индуктивное сопротивление,
 $b_L = 1/(\omega L)$ — индуктивная проводимость.

В этих уравнениях

$$Z_L = j\omega L = jx_L = x_L e^{j\pi/2}, \quad (8.16)$$

$$Y_L = 1/(j\omega L) = -jb_L = b_L e^{-j\pi/2} \quad (8.17)$$

представляют собой комплексные входные функции (комплексное сопротивление Z_L и проводимость Y_L) индуктивного элемента, характеризующие его при гармонических воздействиях.

Реактивные сопротивления и проводимости индуктивного элемента $x_L = \omega L$ и $b_L = 1/(\omega L)$ являются частотно-зависимыми параметрами (рис. 8.5, а). Реактивное сопротивление индуктивного элемента x_L возрастает пропорционально частоте гармонического возмущения ω . На постоянном токе ($\omega = 0$) x_L равно нулю, а реактивная проводимость b_L бесконечно велика. Это означает, что при расчете стационарных режимов в цепях с постоянными возмущениями все индуктивные элементы схемы могут быть замкнуты накоротко.

Если к индуктивности приложено гармоническое напряжение (рис. 8.5, з) $u_L = U_{mL} \cos \omega t$, то комплексная амплитуда $\dot{U}_{mL} = U_{mL} e^{j\psi_u} = U_{mL} e^{j0} = U_{mL}$. Комплексная амплитуда тока согласно (8.15) имеет вид

$$\dot{I}_{mL} = -j \frac{\dot{U}_{mL}}{\omega L} = \frac{\dot{U}_{mL}}{\omega L} e^{-j\pi/2}. \quad (8.18)$$

Мгновенное значение тока отстает от напряжения на угол $\varphi = 90^\circ$ (рис. 8.5, в, з):

$$i_L = \operatorname{Re}[\dot{I}_{mL} e^{j\omega t}] = \frac{U_{mL}}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_{mL} \sin \omega t. \quad (8.19)$$

Мгновенная мощность

$$p_L = u_L i_L = U_{mL} \cos \omega t I_{mL} \sin \omega t = \frac{U_{mL} I_{mL}}{2} \sin 2\omega t$$

изменяется во времени с удвоенной по сравнению с входным возмущением частотой и не имеет постоянной составляющей, $P = 0$ (рис.8.5, з). Это показывает, что индуктивный элемент не рассеивает энергию, а лишь обменивается ею с источником.

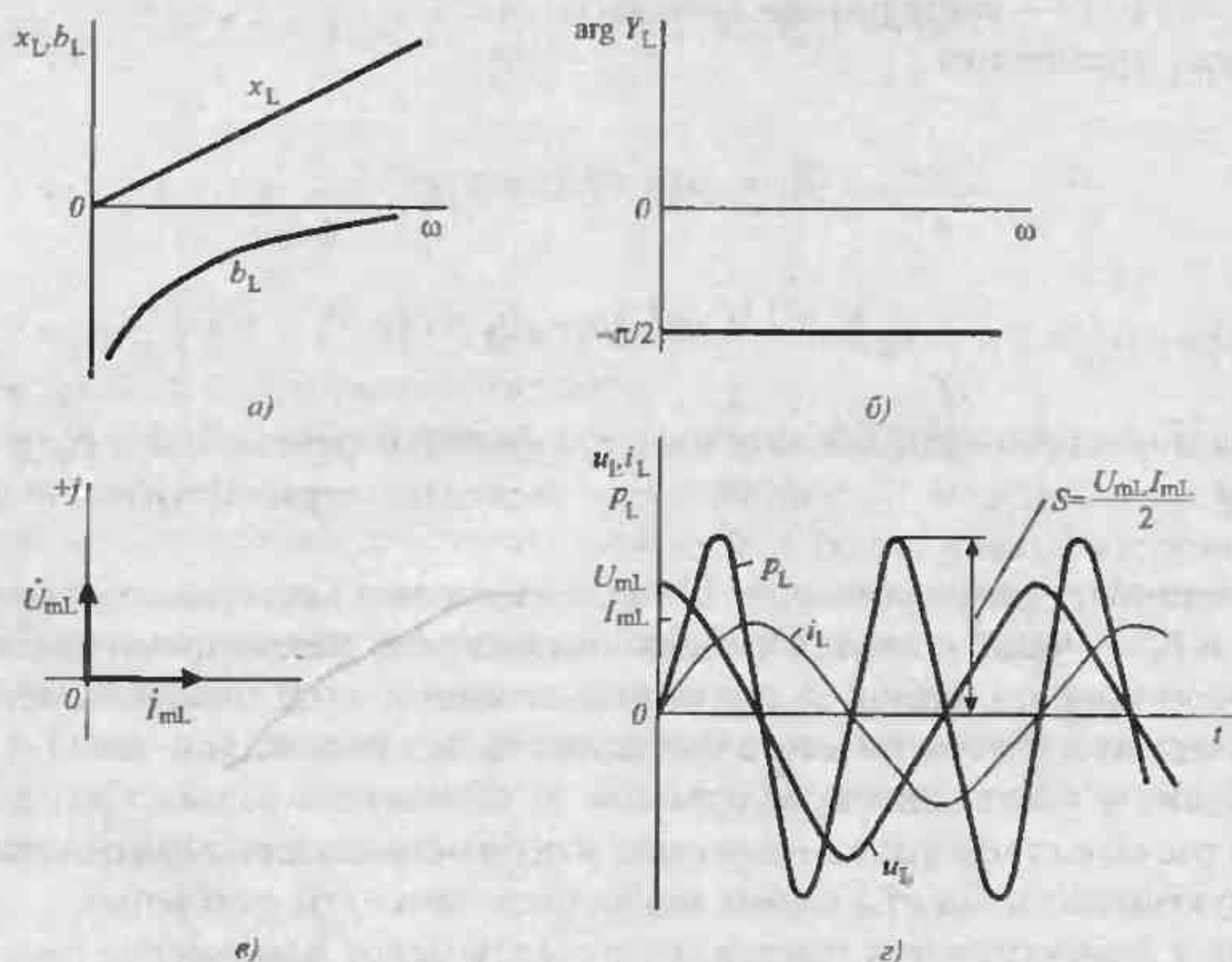


Рис. 8.5. Частотная зависимость сопротивления и проводимости индуктивности (а), фазовый сдвиг (б), векторная диаграмма (в) и временные диаграммы (з)

При полигармоническом возмущении $i_L = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} i_{mk} e^{jk\omega_1 t}$ реакцию определяют методом гармонического анализа с использованием комплексных амплитуд:

$$u_L = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_{Lk} i_{mk} e^{jk\omega_1 t} = \text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} Z_{Lk} i_{mk} e^{jk\omega_1 t}, \quad (8.20)$$

где $Z_{Lk} = jk\omega_1 L = jx_{Lk}$ — комплексное сопротивление индуктивности на k -й гармонике возмущения;

$x_{Lk} = k\omega_1 L$ — соответствующее реактивное сопротивление.

Реактивное сопротивление x_{Lk} растет пропорционально порядковому номеру гармоники. Поэтому включение индуктивного элемента последовательно с резистивной нагрузкой ослабляет высшие гармоники тока тем в большей степени, чем больше $k = \omega_k / \omega_1$. Это явление используется в фильтрах выпрямителей, в которых индуктивность является продольным звеном фильтра.

Лекция 9. Емкостные элементы в электрической цепи

Емкостный элемент представляет собой идеализированный конденсатор, в котором накапливается энергия электрического поля. Конденсатор при низких частотах, когда можно пренебречь потерями в диэлектрике и пластинах, можно рассматривать как емкостный элемент, характеризуемый одним параметром — емкостью $C = q/u_c$. Заряд на обкладках конденсатора q и напряжение на нем u_c имеют одинаковые знаки, и емкость $C > 0$ (рис.9.1, а).

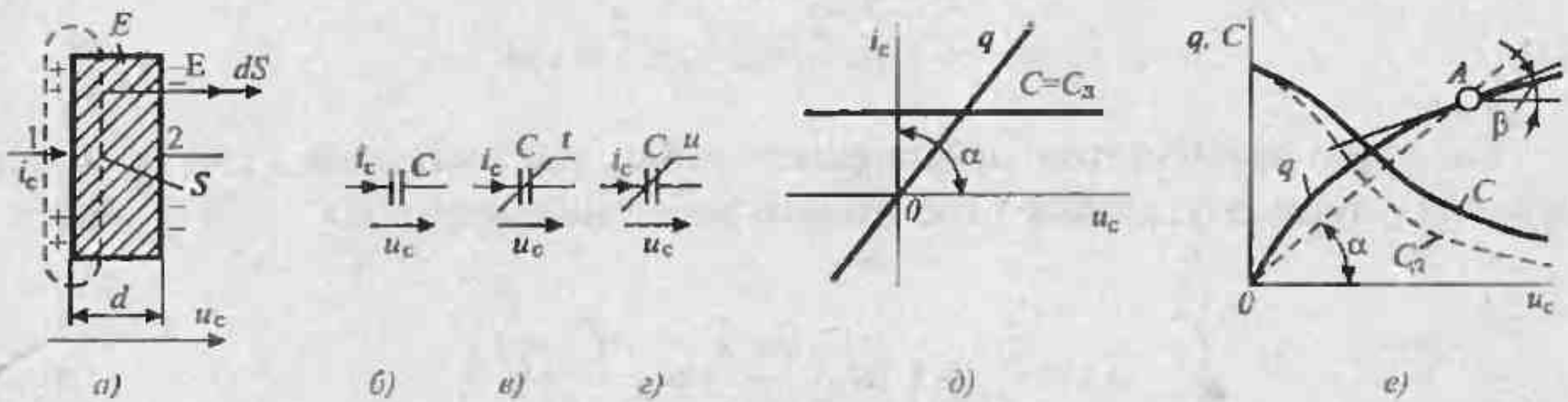


Рис. 9. 1. Изображение конденсатора (а), его условные обозначения (б, в, г), линейная ВАХ (д) и нелинейная ВАХ (е)

Значение емкости зависит от конфигурации электрического поля между пластинами конденсатора, от размеров пластин, их взаимного расположения и диэлектрической проницаемости диэлектрика, расположенного между ними.

Для идеализированного плоского конденсатора, у которого линейные размеры пластин много больше расстояния d между ними и поле между обкладками можно считать однородным ($E = \text{const}$), заряд $q = \oint_S D dS = \epsilon ES$.

Напряжение между пластинами $u_c = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} = Ed$ и емкость $C = q/u_c = \epsilon S/d$.

Емкостный элемент в зависимости от кулон-вольтной характеристики (КлВХ) $q = f(u_c)$ может быть линейным (рис.9.1, б, д) или нелинейным (рис. 9.1, г, е). Если емкость изменяется во времени по некоторому заданному закону, то такой конденсатор называют параметрическим (рис.9.1, в).

Нелинейные емкостные элементы, так же как резистивные и индуктивные элементы, могут характеризоваться статической $C(u)$ и дифференциальной $C_d(u)$ емкостями:

$$C(u) = q/u_c = \text{tg}\alpha, \quad (9.1)$$

$$C_a(u) = dq / du_c = m \operatorname{tg} \beta. \quad (9.1a)$$

Первый параметр используют при расчете постоянных (медленно изменяющихся) составляющих реакции, второй — при расчете переменных составляющих реакций и небольших размахах переменных возмущающих воздействий.

Энергия, накопленная в поле емкостного элемента:

$$W_C = \int_V \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{2} dV = \frac{qu_c}{2}. \quad (9.2)$$

Ток через конденсатор представляет собой ток смещения (1.4) и может проходить лишь в условиях переменного электрического поля

$$i_C = \frac{dq}{dt} = C(u_c) \frac{du_c}{dt} + u_c \frac{dC(u_c)}{dt}. \quad (9.3)$$

Из этого уравнения определяется выражение, связывающее статические и дифференциальные емкости:

$$C_a(u_c) = C(u_c) + u_c \frac{dC(u_c)}{du_c}. \quad (9.4)$$

Если заряд и напряжение на конденсаторе связаны нелинейной зависимостью и $u_c = f(q) = q/[C(q)]$, то

$$\begin{aligned} q &= \int_{-\infty}^q i_C dt = \int_a^q i_C dt + \int_0^q i_C(t) = q(0) + \int_0^q i_C dt = \\ &= C(q) u_c(0) + \int_0^q i_C dt, \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$u_c = \frac{q}{C(q)} = \frac{1}{C(q)} \left[q(0) + \int_0^q i_C dt \right] = u_c(0) + \int_0^q i_C dt,$$

где $q(0)$, $u_c(0)$ — начальные заряд и напряжение на емкостном элементе при $t = 0$.

Таким образом, при расчете процессов в конденсаторе, который является инерционным элементом, необходимо знать начальный запас энергии в элементе $q(0)$ и $u_c(0)$.

Интегральная формула (9.5) удобна при расчете электрических цепей с емкостными элементами численными методами. При выборе достаточно малого шага Δt , когда на нем можно пренебречь изменением емкости и считать $C(q) = C_n = \text{const}$, приращение напряжения на n -м шаге определяется линейным

$$\text{соотношением } \Delta u_{cn} = \frac{1}{C_n} \int_0^{\Delta t} i_c dt.$$

Для линейных элементов расчетные соотношения (9.2), (9.3), (9.5) принимают вид:

$$W_C = Cu_c^2 / 2 = q^2 / (2C) = qu_c / 2, \quad (9.6)$$

$$i_c = C \frac{du_c}{dt}, \quad (9.7)$$

$$u_c = u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_c dt. \quad (9.8)$$

Эти формулы являются математическими моделями линейного емкостного элемента при любых формах возмущающих воздействий. Если за возмущение принять напряжение u_c и за реакцию ток i_c , то конденсатор представляет собой дифференцирующий элемент (9.7). Если же в качестве возмущения задан ток через конденсатор, а выходной величиной является напряжение u_c , то конденсатор является интегрирующим элементом (9.8).

При действии на входе емкостного элемента с $u_c(0) = 0$ импульса тока $i_c = q\delta(t)$ напряжение на нем согласно (9.8) изменяется по закону

$$u_{c\delta} = \frac{1}{C} \int_0^t q\delta(t) dt = \frac{q}{C} \delta_1(t).$$

Импульсная характеристика емкостного элемента по напряжению представляет собой ступенчатую функцию (рис. 9.2, а):

$$h_{uc\delta} = \frac{u_{c\delta}}{q} = \frac{1}{C} \delta_1(t).$$

Сохранение значения напряжения на конденсаторе $u_c = q/C$ после импульсного заряда объясняется тем, что внутреннее сопротивление источника импульсного тока бесконечно велико и цепь конденсатора фактически разомкнута. При действии на входе емкостного элемента с $u_c(0) = 0$

тока ступенчатой формы $i_C = J\delta_1(t)$ напряжение растет по линейному закону (рис. 9.2, б):

$$u_{C1} = \frac{1}{C} \int_0^t J\delta_1(t) dt = \frac{J}{C} t.$$

Переходная характеристика конденсатора по напряжению $h_{u_C1} = u_{C1}/J = t/C$.

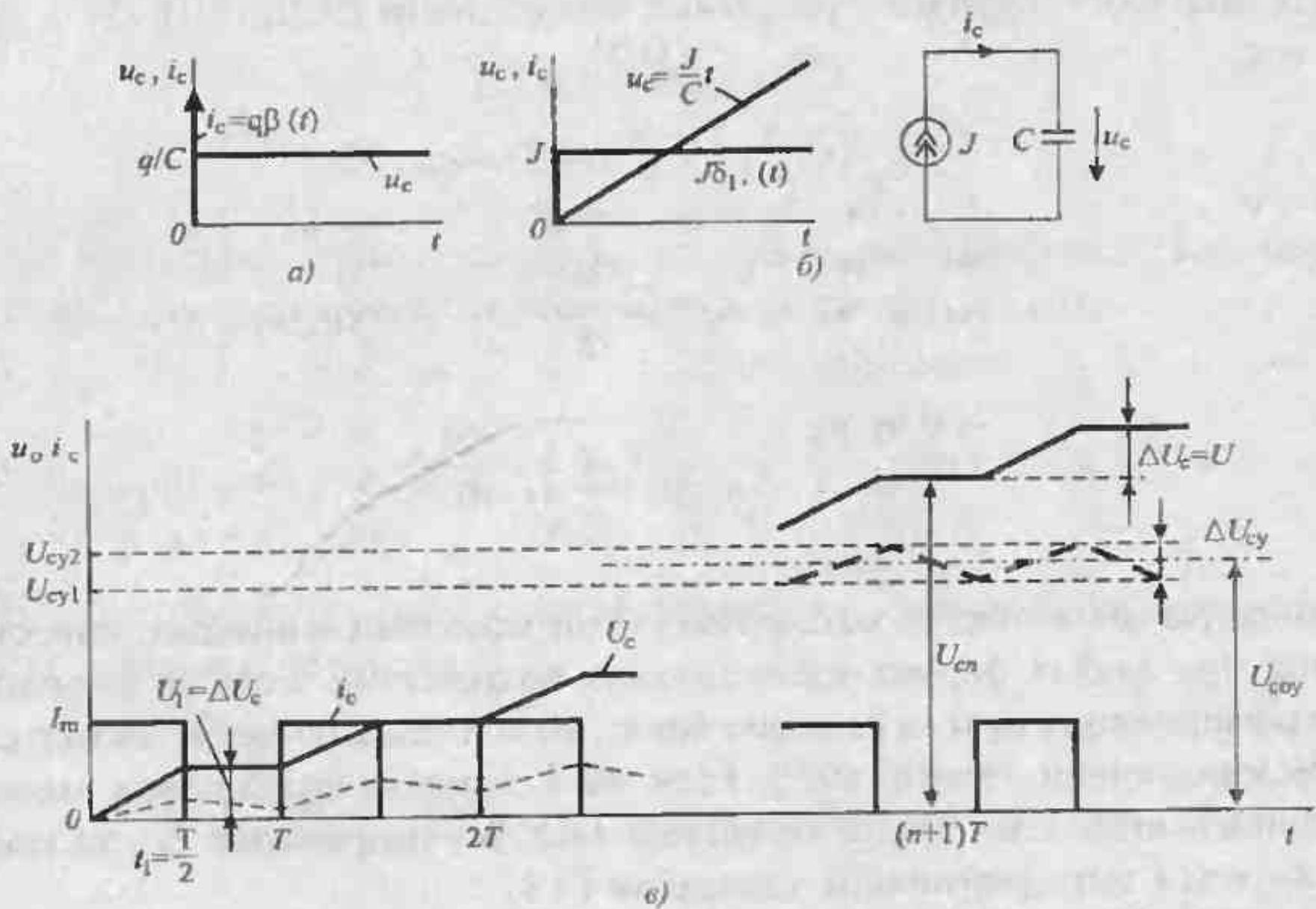


Рис. 9.2. Импульсная (а) и переходная (б) характеристики емкости, процессы в емкости при воздействии последовательности прямоугольных импульсов (в)

Воспользуемся полученными формулами для определения реакции — напряжения на емкостном элементе при $u_C(0) = 0$, если к нему приложено возмущающее воздействие $J(t)$ в виде знакопостоянных импульсов тока прямоугольной формы (рис. 9.2, в):

$$J(t) = \begin{cases} J & \text{на интервалах } nT \leq t \leq (n+1)T/2, \\ 0 & \text{на интервалах } (n+1)T/2 \leq t \leq (n+1)T. \end{cases}$$

На интервале действия первого импульса напряжение u_C изменяется линейно:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t J dt = \frac{Jt}{C}, 0 \leq t \leq T/2 \text{ и к моменту } t = T/2 \text{ достигает значения}$$

$$u_C(T/2) = U_1 = \Delta U_C = (J/C)(T/2) = (J/C)(\pi/\omega).$$

На втором интервале $T/2 \leq t \leq T$ ток равен нулю, но источник тока обладает бесконечно большим сопротивлением, поэтому накопленный заряд и напряжение сохраняются на этом интервале неизменными. Приращения напряжения u_C на каждом интервале действия импульсов $i(t)$ одинаковы, так как площади всех импульсов тока равны. Поэтому закон изменения напряжения u_C на $(n+1)$ -м периоде

$$u_C(n+1) = \begin{cases} nU_1 + It'/C & \text{на интервалах } nT \leq t \leq (n+1)T/2, \\ (n+1)U_1 & \text{на интервалах } (n+1)T/2 \leq t \leq (n+1)T, \end{cases}$$

где $t' = t - nT$.

Таким образом, в условиях знакопостоянных импульсов тока (рис. 9.2, в) происходит процесс накопления энергии в поле конденсатора на каждом импульсе, и при $t \rightarrow \infty$ $u_C(\infty) \rightarrow \infty$. Такой процесс возможен лишь при отсутствии потерь мощности в конденсаторе, соединительных проводах и при идеальности источника тока. В реальных условиях напряжение на конденсаторе по прошествии n периодов, в течение которых закончится переходный процесс, будет стремиться к некоторому конечному значению между $U_{C y1}$ и $U_{C y2}$ (штриховая линия на рис. 9.2, в). Установившееся среднее значение $U_{C y0}$ определяется относительной продолжительностью $\gamma = t_1/T$ импульсов тока и зависит от потерь мощности на интервалах периода.

Широтно-импульсный принцип управления используется в импульсных регуляторах постоянного напряжения, в которых конденсатор выходного фильтра заряжается импульсами постоянного тока высокой частоты переменной скважности $(1 - \gamma)$, определяемой значением входного сигнала в системе.

Операторные схемы замещения емкостного элемента (рис. 9.3) синтезируются на основе изображений по Лапласу уравнений (9.7) и (9.8):

$$I_C(s) = C[sU_C(s) - u_C(0)] = Y_C(s)U_C(s) - Cu_C(0), \quad (9.9)$$

$$U_C(s) = \frac{u_C(0)}{s} + \frac{1}{sC}I_C(s) = \frac{u_C(0)}{s} + Z_C(s)I_C(s), \quad (9.10)$$

где

$$Y_C(s) = sC; \quad (9.11)$$

$$Z_C(s) = 1/(sC) \quad (9.12)$$

соответственно операторная проводимость и сопротивление емкостного элемента; $Cu_C(0)$ — изображение импульсного тока источника, учитывающего начальный запас энергии в поле конденсатора; $u_C(0)/s$ — изображение напряжения источника ступенчатой формы, учитывающего начальные условия.

Операторные схемы замещения (рис. 9.3, а, б) используются при расчете переходных процессов в цепях с емкостными элементами при любых формах возмущающих воздействий.

Расчет установившихся процессов при гармонических возмущениях выполняется методом комплексных амплитуд. Комплексные сопротивления и проводимости емкостного элемента получим из формул (9.11), (9.12) подстановкой

$$Y_C = j\omega C = jb_C, \quad (9.13)$$

$$Z_C = 1/(j\omega C) = -jx_C, \quad (9.14)$$

где

$$b_C = \omega C; \quad (9.14a)$$

$$x_C = 1/(\omega C) \text{ —} \quad (9.14b)$$

реактивная проводимость и сопротивление емкостного элемента.

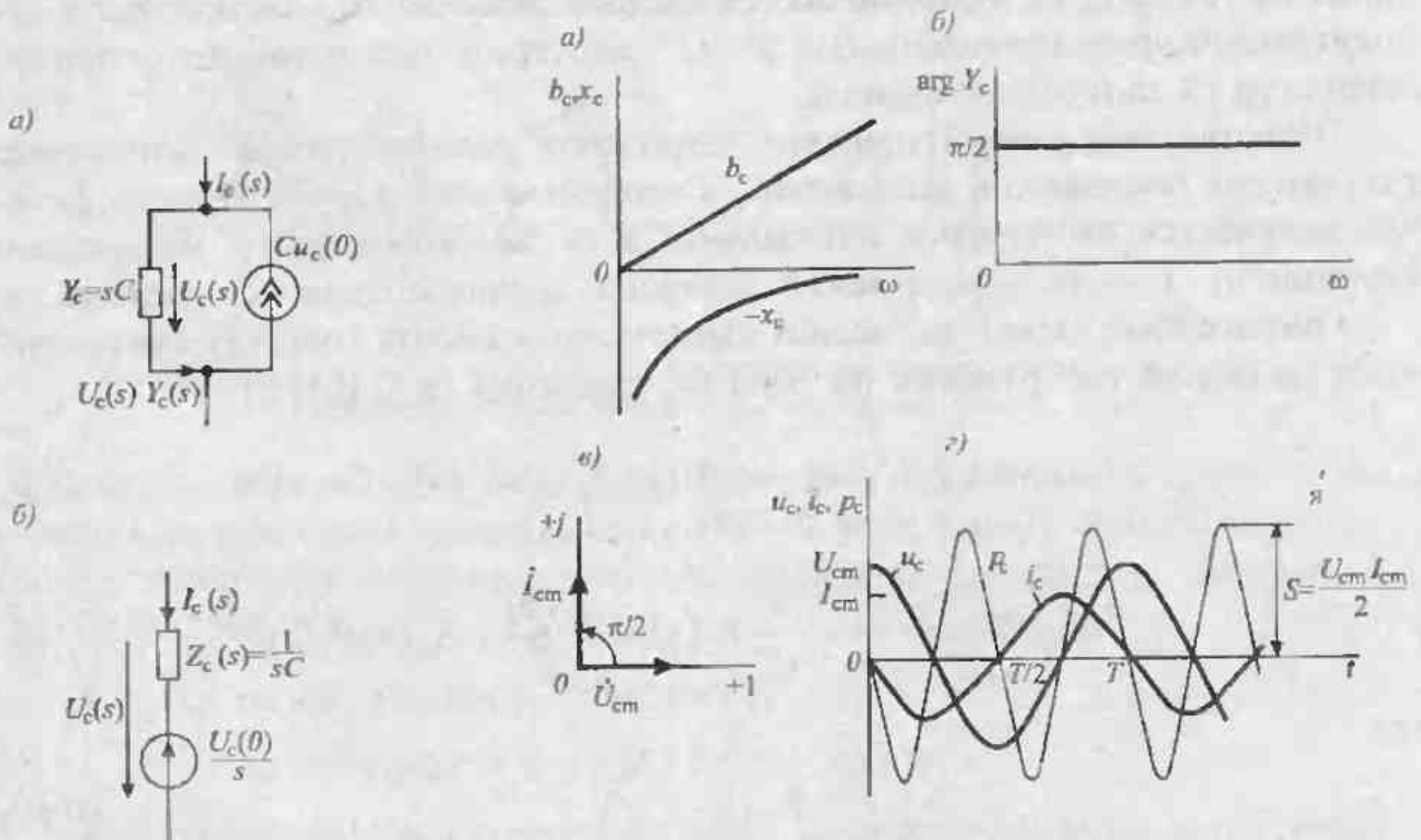


Рис. 9.3. Операторные схемы замещения емкости (а, б)

Рис. 9.4. Частотные зависимости сопротивления и проводимости емкости (а), фазовый сдвиг (б), векторная диаграмма (в) и временные диаграммы (г)

Таким образом, комплексные входные функции емкостного элемента Y_C и Z_C являются частотно-зависимыми и приведены на рис. 9.4, а, б. Комплексные напряжение и ток в конденсаторе при гармоническом возмущении согласно (9.7) связаны соотношениями:

$$\dot{I}_C = j\omega\dot{U}_C = Y_C\dot{U}_C = jb_C\dot{U}_C, \quad (9.15)$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_C = -jx_C\dot{I}_C = Z_C\dot{I}_C. \quad (9.16)$$

Расположение векторов \dot{U}_C и \dot{I}_C на комплексной плоскости показано на рис. 9.4, в. При этом ток i_C и напряжение u_C являются гармоническими функциями времени, которые могут быть получены из уравнений (9.15), (9.16). Если $\dot{U}_{Cm} = U_{Cm}$ и $u_C = U_{Cm} \cos \omega t$, то $\dot{I}_{Cm} = b_C U_{Cm} e^{j\pi/2}$ и

$$i_C = b_C U_{Cm} \cos(\omega t + \pi/2) = -\omega C U_{Cm} \sin \omega t. \quad (9.17)$$

Таким образом, ток i_C опережает напряжение на конденсаторе на угол $\pi/2$ и является чисто реактивным (рис. 9.4, з).

Мгновенная мощность, потребляемая емкостным элементом,

$$p = u_C i_C = -b_C U_{Cm}^2 \cos \omega t \sin \omega t = -\frac{U_{Cm} I_{Cm}}{2} \sin 2\omega t, \quad (9.18)$$

содержит только переменную составляющую, изменяющуюся с частотой 2ω .

Средняя за период мощность такая же, как и в случае с индуктивным элементом:

$$P = U_C I_C \cos \frac{\pi}{2} = 0. \quad (9.19)$$

При негармоническом возмущении, представленном в комплексной форме:

$u_C = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{U}_{Cmk} e^{jk\omega_1 t}$, ток реакции определяется выражением

$$i_C = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{I}_{Cmk} e^{jk\omega_1 t} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} Y_{Ck} \dot{U}_{Cmk} e^{jk\omega_1 t}, \quad (9.20)$$

где $Y_{Ck} = jk\omega_1 C = jb_{Ck}$ — комплексная реактивная проводимость емкостного элемента на k -й гармонике напряжения;

$b_{Ck} = k\omega_1 C$ — реактивная проводимость на k -й гармонике.

Реактивная проводимость емкостного элемента растет пропорционально порядковому номеру гармоники напряжения u_{Ck} и для нулевой (постоянной)

составляющей она равна нулю. Если конденсатор включен последовательно с резистивной нагрузкой, то при наличии постоянной или медленно изменяющейся составляющей во входном напряжении u_c она будет почти полностью выделяться на емкостном элементе. Высокочастотным составляющим напряжения конденсатор оказывает малое сопротивление, уменьшающееся пропорционально $1/k$. Поэтому конденсатор используют в качестве продольного элемента в фильтре верхних частот и поперечного элемента в фильтре нижних частот.

Характеристики реальных двухполюсных элементов, резистора, катушки и конденсатора отличаются от рассмотренных характеристик идеальных элементов. Происходит это из-за потерь в проводах, пластинах и диэлектрике конденсатора, магнитопроводе катушки, а также из-за влияния паразитных параметров устройства. Эти явления учитываются в схемах замещения дополнительными идеальными элементами, включенными последовательно или параллельно основному элементу, характеризующему рассматриваемое устройство.

Потери мощности в диэлектрике конденсатора и в магнитопроводе катушки, возникающие в переменных электромагнитных полях, приблизительно пропорциональны квадрату действующего значения напряжения. Поэтому для учета этих потерь в схемы замещения устройств вводят резистивные элементы, включенные параллельно основному элементу.

Потери в проводах, обмотках и пластинах учитываются последовательно включенными резистивными элементами, так как эти потери пропорциональны квадрату действующего значения тока в устройстве. Следует учитывать, что поскольку потери в диэлектрике и магнитопроводе являются функциями частоты возмущения, значения сопротивлений, учитывающих эти потери, будут также частотно-зависимыми параметрами. Реальные резисторы имеют паразитную индуктивность L_r и емкость C_r , их схема замещения дана на рис. 9.5, а.

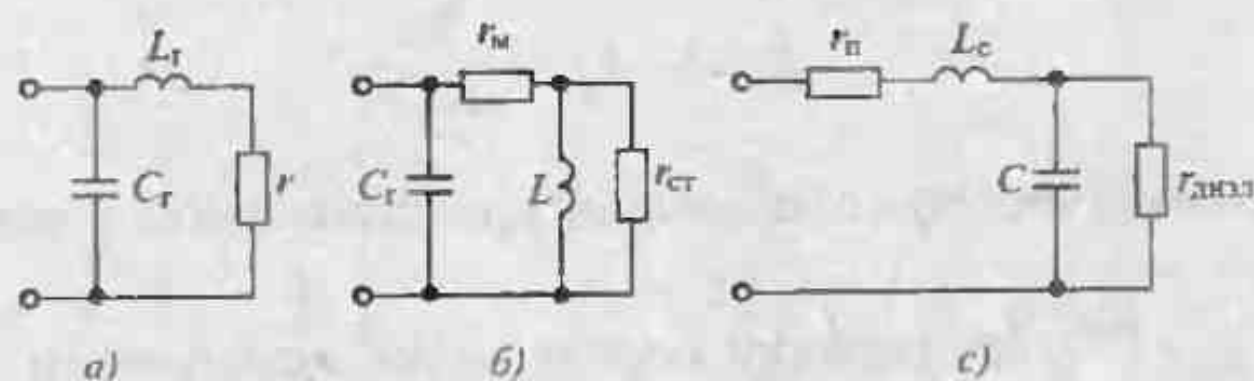


Рис. 9.5. Схема замещения резистора (а), катушка индуктивности (б) и конденсатора (с)

Основной характеристикой катушки является ее индуктивность L . Однако реальные катушки имеют сопротивления потерь в обмотке r_m , потерь в магнитопроводе $r_{ст}$ и межвитковую емкость C_L , которые изображены на схеме замещения катушки (рис. 9.5, б).

Аналогично, схема замещения конденсатора кроме основного элемента — емкости C , включает в себя резистивные элементы, учитывающие потери в

магнитопроводе r_n , изоляции $r_{\text{дв.эл.}}$ и индуктивность пластин и выводов L_c (рис. 9.5, в). Паразитные параметры реальных элементов сказываются в основном на высоких частотах, и слабо проявляются на низких.

Лекция 10. Индуктивно связанные элементы

В электротехнических устройствах индуктивные элементы часто располагают в непосредственной близости друг от друга. При этом магнитные потоки каждого из элементов частично или полностью сцеплены с витками другого элемента (рис. 10.1, а). Для построения модели индуктивно связанных катушек в первом приближении можно считать их сопротивления и емкости ничтожно малыми и не учитывать.

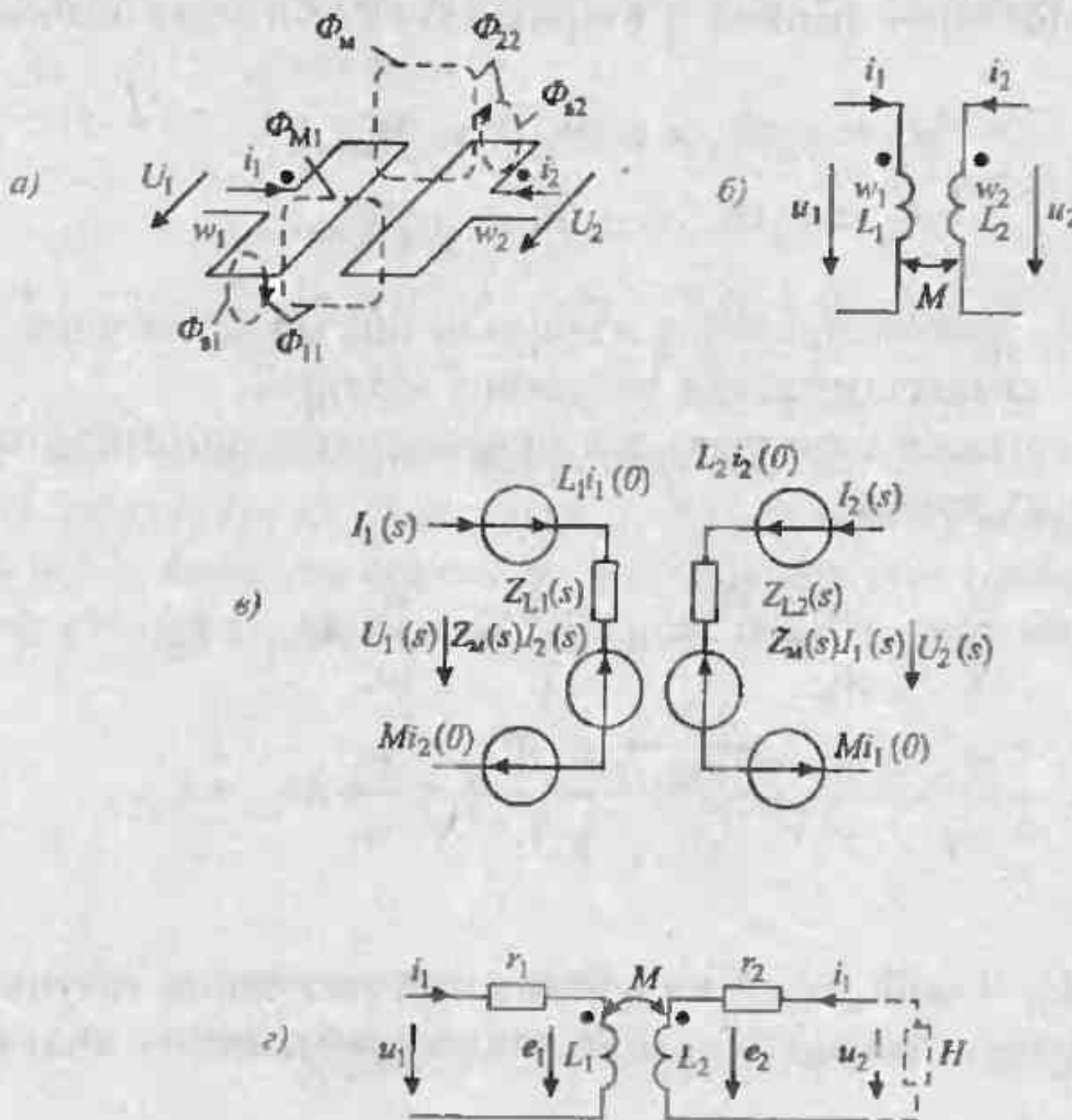


Рис. 10.1. Магнитные потоки в индуктивно связанных катушках (а), их условное обозначение (б), схема замещения (в) и учет потерь в катушках (г)

Количественно индуктивную связь катушек оценивают *взаимной индуктивностью* M , под которой понимают отношение общих потокосцеплений от потоков взаимной индукции Φ_{M1} , Φ_{M2} к создающим их токам:

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = \frac{w_1 \Phi_{M2}}{i_2}, M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{w_2 \Phi_{M1}}{i_1}. \quad (10.1)$$

Определим взаимные индуктивности двух индуктивно связанных катушек, изображенных на рис.10.1, а. Магнитный поток одного витка первой катушки можно представить в виде суммы двух магнитных потоков: $\Phi_{11} = \Phi_{s1} + \Phi_{M1}$, где Φ_{s1} — магнитный поток рассеяния, создаваемый током i_1 и сцепленный с витками w_1 первой катушки; Φ_{M1} — магнитный поток взаимной индукции, создаваемый током i_1 первой катушки и сцепленный с витками w_2 второй катушки.

Аналогично можно представить магнитный поток второй катушки: $\Phi_{22} = \Phi_{s2} + \Phi_{M2}$, где Φ_{s2} — магнитный поток рассеяния, создаваемый током i_2 и сцепленный с витками w_2 второй катушки; Φ_{M2} — магнитный поток взаимной индукции, создаваемый током i_2 второй катушки и сцепленный с витками w_1 первой катушки.

Полные потокосцепления первой и второй катушек имеют значения

$$\begin{cases} \Psi_{11} = w_1 \Phi_{11} = w_1 \Phi_{s1} + w_1 \Phi_{M1}, \\ \Psi_{22} = w_2 \Phi_{22} = w_2 \Phi_{s2} + w_2 \Phi_{M2}, \end{cases} \quad (10.2)$$

где $w_1 \Phi_{M1}$ и $w_2 \Phi_{M2}$ — потокосцепления взаимной индукции катушек;
 $w_1 \Phi_{s1}$ и $w_2 \Phi_{s2}$ — потокосцепления рассеяния катушек.

Индуктивности катушек определяются отношениями потокосцеплений катушек к создающим их токам:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\Psi_{11}}{i_1} = \frac{w_1 w_2 \Phi_{M1}}{w_2 i_1} + \frac{w_1 \Phi_{s1}}{i_1} = \frac{w_1}{w_2} M_{21} + L_{s1}, \\ L_2 &= \frac{\Psi_{22}}{i_2} = \frac{w_2 w_1 \Phi_{M2}}{w_1 i_2} + \frac{w_2 \Phi_{s2}}{i_2} = \frac{w_2}{w_1} M_{12} + L_{s2}, \end{aligned} \quad (10.3)$$

где $L_{s1} = w_1 \Phi_{s1}/i_1$ и $L_{s2} = w_2 \Phi_{s2}/i_2$ — индуктивности рассеяния катушек;
 $M_{21} = w_2 \Phi_{M1}/i_1$ и $M_{12} = w_1 \Phi_{M2}/i_2$ — коэффициенты взаимной индуктивности катушек.

Согласно закону Ома для магнитной цепи (8.4 а)

$$\begin{aligned} \Phi_{M1} &= F_1 G_M, \quad \Phi_{M2} = F_2 G_M, \\ \Phi_{s1} &= F_1 G_{s1}, \quad \Phi_{s2} = F_2 G_{s2}, \end{aligned}$$

где $F_1 = w_1 i_1$ и $F_2 = w_2 i_2$ — магнитодвижущие силы первой и второй катушек соответственно;

G_M — магнитная проводимость среды для потока взаимной индукции;
 G_{s1} и G_{s2} — магнитные проводимости среды для потоков рассеяния Φ_{s1} ,
 Φ_{s2} .

Взаимные индуктивности и индуктивности рассеяния катушек можно представить в виде

$$M_{21} = \frac{w_2 F_1 G_M}{i_1} = w_1 w_2 G_M; M_{12} = \frac{w_1 F_2 G_M}{i_2} = w_1 w_2 G_M;$$

$$L_{s1} = \frac{w_1 F_1 G_{s1}}{i_1} = w_1^2 G_{s1}; L_{s2} = \frac{w_2 F_2 G_{s2}}{i_2} = w_2^2 G_{s2},$$

откуда следует, что взаимные индуктивности двух катушек одинаковы:

$$M_{12} = M_{21} = M = w_1 w_2 G_M.$$

Окончательно индуктивности катушек имеют значения:

$$\begin{cases} L_1 = L_{s1} + \frac{w_1}{w_2} M = (G_{s1} + G_M) w_1^2, \\ L_2 = L_{s2} + \frac{w_2}{w_1} M = (G_{s2} + G_M) w_2^2, \end{cases} \quad (10.4)$$

где $w_1/w_2 = n$ — коэффициент трансформации катушек.

Степень индуктивной связи двух катушек можно также оценить с помощью коэффициента связи, определяемого как среднее геометрическое отношений потоков взаимной индукции к полным потокам катушек:

$$k_{св} = \sqrt{\frac{\Phi_{M1} \Phi_{M2}}{\Phi_{11} \Phi_{22}}}. \quad (10.5)$$

Так как потоки имеют значения $\Phi_{M1} = Mi_1/w_2$; $\Phi_{M2} = Mi_2/w_1$; $\Phi_{11} = L_1 i_1/w_1$,
 $\Phi_{22} = L_2 i_2/w_2$, то коэффициент связи определяется выражением

$$k_{св} = M / \sqrt{L_1 L_2} \quad (10.5a)$$

Так как потоки взаимной индукции не могут превышать полные потоки катушек, то и коэффициент связи не может быть больше единицы: $k_{св} \leq 1$. Коэффициент связи зависит от способа выполнения катушек, их взаимной ориентации, применения магнитопровода с $\mu \gg 1$. В пределе при полной магнитной связи между катушками, когда отсутствуют потоки рассеяния, $k_{св} = 1$.

Если по катушкам одновременно проходят токи i_1 и i_2 , то потокосцепление Ψ_{11} первой катушки изменяется на потокосцепление взаимной индукции Ψ_{12} второй катушки: $\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12}$, где Ψ_1 — полное эквивалентное потокосцепление первой катушки. Полное потокосцепление второй катушки также изменяется на потокосцепление Ψ_{21} взаимной индукции первой катушки: $\Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{21}$, где Ψ_2 — полное эквивалентное потокосцепление второй катушки. При этом, если собственные потоки катушек совпадают по направлению с потоками взаимной индукции, то составляющие потоки складываются, а если они направлены в разные стороны, то составляющие потоки вычитаются.

Концы индуктивно связанных катушек обозначают особыми значками (точками, кружками, звездочками и т. п.), которые характеризуют взаимное направление потоков самоиндукции и взаимной индукции этих катушек. Если токи в катушках направлены одинаково относительно концов, отмеченных одинаковыми значками (однополярных концов) (см. рис.10.1, б), то магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в этих катушках направлены в одну сторону. В противном случае магнитные потоки имеют различные направления.

Если индуктивно связанные катушки включены в электрическую цепь, то катушки, токи в которых имеют одинаковое направление относительно однополярных концов, называют *включенными согласно*, а катушки, токи в которых имеют различные направления относительно однополярных концов называют *включенными встречно*.

Напряжение на первой катушке

$$u_1 = d\Psi_1 / dt = d\Psi_{11} / dt \pm d\Psi_{12} / dt. \quad (10.6)$$

Если учесть, что $\Psi_{11} = L_1 i_1$, а $\Psi_{12} = M i_2$, то

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} = u_{1L} \pm u_{1M}. \quad (10.6a)$$

Аналогично определяют напряжение на второй катушке:

$$u_2 = d\Psi_2 / dt = d\Psi_{22} / dt \pm d\Psi_{21} / dt = u_{2L} \pm u_{2M}. \quad (10.7)$$

Можно показать, что запас энергии в поле двух индуктивно связанных катушек

$$W_M = L_1 i_1^2 / 2 + L_2 i_2^2 / 2 \pm M i_1 i_2. \quad (10.8)$$

Знак плюс в уравнении соответствует согласному включению катушек, а знак минус — встречному.

Выражения (10.6) и (10.7) справедливы при любых видах воздействий. При гармоническом воздействии, заданном в комплексной форме (3.6) напряжения на катушках (10.6 а), (10.7) имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 = Z_1 \dot{I}_1 \pm Z_M \dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1 = Z_2 \dot{I}_2 \pm Z_M \dot{I}_1, \end{cases} \quad (10.9)$$

где $Z_1 = j\omega L_1$ — комплексное индуктивное сопротивление первой катушки;
 $Z_2 = j\omega L_2$ — комплексное индуктивное сопротивление второй катушки;
 $Z_M = j\omega M = jx_M$ — комплексное сопротивление взаимной индукции;
 $x_M = \omega M$ — реактивное сопротивление взаимной индукции.

При периодическом негармоническом воздействии, заданном в комплексной форме, реакция цепи на k -й гармонике определяется выражениями

$$\begin{cases} \dot{U}_{1k} = Z_{1k} \dot{I}_{1k} \pm Z_{Mk} \dot{I}_{2k}, \\ \dot{U}_{2k} = Z_{2k} \dot{I}_{2k} \pm Z_{Mk} \dot{I}_{1k}, \end{cases} \quad (10.10)$$

где $\dot{U}_{1k}, \dot{U}_{2k}$ — комплексные значения напряжений k -й гармоники;
 $Z_{1k} = jk\omega_1 L_1, Z_{2k} = jk\omega_1 L_2$ — комплексные сопротивления катушек для k -й гармоники тока;
 $Z_{Mk} = jk\omega_1 M$ — комплексное сопротивление взаимной индукции для k -й гармоники тока;
 $\dot{I}_{2k}, \dot{I}_{1k}$ — комплексные значения токов k -й гармоники.

Для неперiodического воздействия, заданного в операторной форме, уравнения индуктивно связанных катушек (10.6а) и (10.7) с учетом (8.12) примут вид:

$$\begin{cases} U_1(s) = Z_{L1}(s) I_1(s) \pm Z_M(s) I_2(s) - L_1 i_1(0) \pm M i_2(0), \\ U_2(s) = Z_{L2}(s) I_2(s) \pm Z_M(s) I_1(s) - L_2 i_2(0) \pm M i_1(0), \end{cases} \quad (10.11)$$

где $Z_{L1}(s) = sL_1$ и $Z_{L2}(s) = sL_2$ — операторные индуктивные сопротивления катушек;

$Z_M(s) = sM$ — операторное сопротивление взаимной индукции;

$L_1 i_1(0)$ и $L_2 i_2(0)$ — напряжения самоиндукции, обусловленные начальными токами в катушках;

$M i_1(0)$ и $M i_2(0)$ — напряжения взаимной индукции, обусловленные начальными токами в катушках.

Уравнениям (10.11) соответствует схема замещения индуктивно связанных катушек в операторной форме, приведенная на рис. 10.11, в, которая состоит из операторных сопротивлений $Z_{L1}(s)$ и $Z_{L2}(s)$, неуправляемых источников напряжения $L_1 i_1(0)$, $L_2 i_2(0)$, $M i_1(0)$, $M i_2(0)$ и управляемых источников напряжения $Z_M(s) I_1(s)$ и $Z_M(s) I_2(s)$.

При наличии двух и более катушек взаимные индуктивности определяют между любыми парами катушек. Задавая ток в первой катушке, определяют взаимные индуктивности M_{12} , M_{13} , ..., M_{1n} . Затем задают ток во второй катушке и определяют взаимные индуктивности M_{23} , M_{24} , ..., M_{2n} . После этого задают ток в третьей катушке и т. д. Последнюю взаимную индуктивность $M_{(n-1)n}$ определяют, задавая ток в $(n - 1)$ катушке.

Если учесть сопротивления потерь в индуктивно связанных катушках (r_1 , r_2 на рис. 10.1, з), то уравнения (10.6 а) и (10.7) примут вид:

$$\begin{cases} u_1 = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}, \\ u_2 = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}. \end{cases} \quad (10.12)$$

При гармоническом воздействии, заданном в комплексной форме, уравнения (10.12) примут вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11} \dot{I}_1 \pm Z_M \dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 = Z_{22} \dot{I}_2 \pm Z_M \dot{I}_1, \end{cases} \quad (10.13)$$

где $Z_{11} = r_1 + j\omega L_1$ и $Z_{22} = r_2 + j\omega L_2$ — комплексные сопротивления индуктивно связанных катушек.

Индуктивно связанные катушки называют *трансформатором*, если их взаимная связь обусловлена *только общим магнитным потоком*. При этом цепь, к которой подключается источник возмущения (входное воздействие u_1), называют *первичной*, а цепь, к которой подключена нагрузка Z_n — *вторичной* (рис. 10.2, а). Для более полной магнитной связи между обмотками w_1 и w_2 их размещают на общем магнитопроводе из ферромагнитного материала с $\mu \gg 1$. При этом, если магнитопровод работает на линейном участке вебер-амперной характеристики ($\mu = \text{const}$) и потерями мощности в нем можно пренебречь, то такой трансформатор представляет собой линейный элемент.

Уравнения линейного трансформатора совпадают с уравнениями двух индуктивно связанных катушек (10.12) или (10.13), если считать, что входное

воздействие представляет собой напряжение u_1 или \dot{U}_1 , а выходное напряжение u_2 или $\dot{U}_2 = -Z_{\text{вн}} \dot{I}_2$ представляет собой напряжение на нагрузке (знак минус обусловлен различным направлением тока и напряжения на нагрузке).

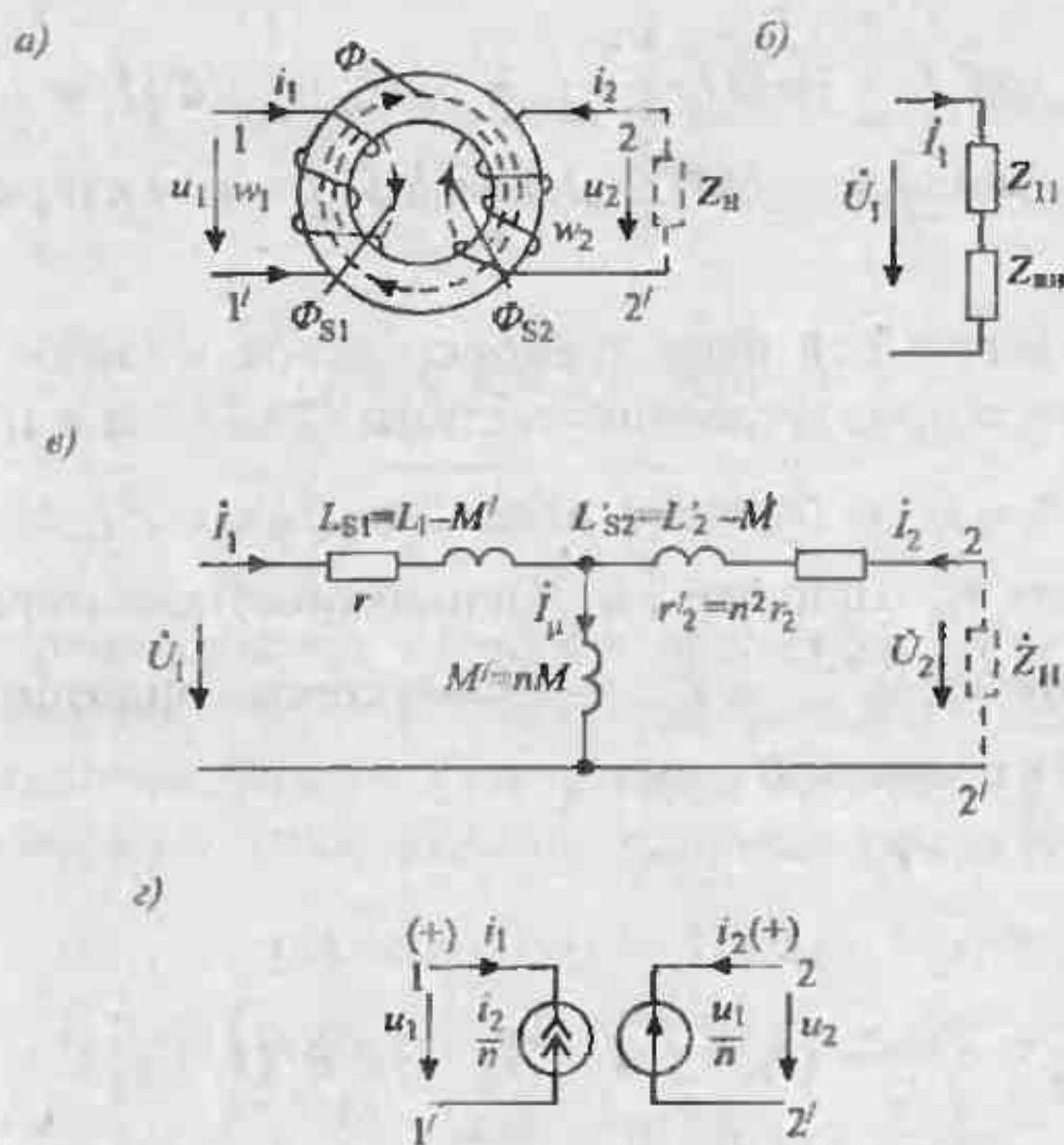


Рис. 10. 2. Схема трансформатора (а), его схема замещения (б), приведенная схема замещения (в) и схема замещения идеального трансформатора (г)

Трансформатор можно заменить эквивалентным двухполюсником, если привести его вторичную цепь к первичной. Для этого из второго уравнения системы (10.13) найдем: $\dot{I}_2 = -Z_{M'} / (Z_{22} + Z_{\text{вн}})$. Подставляя значение тока \dot{I}_2 в первое уравнение системы (10.13), получим

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \left[Z_{11} - Z_{M'}^2 / (Z_{22} + Z_{\text{вн}}) \right] = \dot{I}_1 (Z_{11} + Z_{\text{вн}}) = \dot{I}_1 Z_{\text{вх}}, \quad (10.14)$$

где $Z_{\text{вн}} = -Z_{M'}^2 / (Z_{22} + Z_{\text{вн}})$ — комплексное вносимое сопротивление трансформатора;

$Z_{\text{вх}} = Z_{11} + Z_{\text{вн}} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$ — комплексное входное сопротивление трансформатора.

Эквивалентная схема приведенного трансформатора, соответствующая уравнению (10.14), изображена на рис. 10.2, б. В этой схеме вторичная цепь заменена комплексным вносимым сопротивлением $Z_{\text{вн}}$. Аналогичный эквивалентный двухполюсник можно получить при неперiodическом воздействии, заданном в операторной форме, используя уравнения (10.11).

Если учесть формулы (10.4), то уравнения трансформатора с коэффициентом трансформации $n = w_1/w_2$ для комплексов токов и напряжений (10.13) можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = r_1 \dot{I}_1 + j\omega(L_{s1} + nM) \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 = r_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = r_2 \dot{I}_2 + j\omega(L_{s2} + M/n) \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1. \end{cases} \quad (10.15)$$

Для приведения вторичной цепи трансформатора к числу витков первичной обмотки умножим второе уравнение системы (10.15) на n и введем обозначения: $nM = M'$; $n^2 L_2 = L_2'$; $n^2 L_{s2} = L_{s2}'$; $n^2 r_2 = r_2'$; $n \dot{U}_2 = \dot{U}_2'$; $\dot{I}_2 / n = \dot{I}_2'$ — приведенные к числу витков w_1 параметры вторичной обмотки, вторичное напряжение и ток трансформатора; $n^2 Z_{11} = Z_{11}'$ — приведенное сопротивление нагрузки.

Уравнения (10.15) приводим к виду

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (r_1 + j\omega L_{s1}) \dot{I}_1 + j\omega M' (\dot{I}_1 + \dot{I}_2'), \\ \dot{U}_2' = n \dot{U}_2 = (r_2' + j\omega L_{s2}') \dot{I}_2' + j\omega M' (\dot{I}_1 + \dot{I}_2'). \end{cases} \quad (10.16)$$

Уравнение м.д.с., трансформатора (рис. 10.2, а) $\dot{F}_1 + \dot{F}_2 = \dot{F}_\mu$ или $w_1 \dot{I}_1 + w_2 \dot{I}_2 = w_1 \dot{I}_\mu$ можно привести к виду

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 / n = \dot{I}_1 + \dot{I}_2' = \dot{I}_\mu. \quad (10.17)$$

Полученным уравнениям соответствует T -образная схема замещения *приведенного линейного трансформатора* (рис. 10.2, в), в которой взаимная индуктивная связь между обмотками заменена тремя индуктивными элементами L_{s1} , L_{s2}' и M' . Схема состоит из ветвей первичной r_1 , L_{s1} , приведенной вторичной обмотки r_2' , L_{s2}' и ветви намагничивания M' , которая обтекается суммарным током $(\dot{I}_1 + \dot{I}_2')$, называемым намагничивающим током \dot{I}_μ , который создает поток взаимной индукции в трансформаторе. Комплексный коэффициент передачи по току трансформатора определяем из второго уравнения системы (10.15):

$$\dot{K}_i = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = - \frac{j\omega M}{r_2 + j\omega L_2 + Z_{11}} = - \frac{j\omega M}{r_2 + j\omega(L_{s2} + M/n) + Z_{11}}. \quad (10.18)$$

Комплексный коэффициент передачи по напряжению согласно уравнениям (10.15):

$$\begin{aligned} \dot{K}_u &= \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \frac{r_2 + j\omega L_2 + j\omega M \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}}{r_1 + j\omega L_1 + j\omega M \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}} = \\ &= \dot{K}_i \frac{r_2 + j\omega L_2 + j\omega M \frac{1}{\dot{K}_i}}{r_1 + j\omega L_1 + j\omega M \dot{K}_i}. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Рассмотрим трансформатор, у которого отсутствуют потери в обмотках ($r_1 = r_2 = 0$), а коэффициент связи $k_{св} = 1$. Такой трансформатор называют *совершенным*.

Так как потоки рассеяния отсутствуют и $G_{s1} = G_{s2} = 0$, то выражения для индуктивностей обмоток совершенного трансформатора принимают вид:

$$\begin{aligned} L_1 &= w_1^2 G_M; L_2 = w_2^2 G_M; M = \sqrt{L_1 L_2} = \\ &= w_1 w_2 G_M; M' = nM = w_1^2 G_M = L_1 = L_2 = n^2 L_2. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Учитывая равенства (10.20), преобразуем уравнения (10.15) приведенного трансформатора:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M' \dot{I}'_2 = j\omega M' (\dot{I}_1 + \dot{I}'_2), \\ \dot{U}'_2 &= n \dot{U}_2 = j\omega L'_2 \dot{I}'_2 + j\omega M' \dot{I}_1 = j\omega M' (\dot{I}_1 + \dot{I}'_2) \end{aligned} \quad (10.20a)$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_2 = j\omega M (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = -\dot{I}_2 Z_n. \quad (10.21)$$

Комплексные коэффициенты передачи по току и напряжению для совершенного трансформатора определяются из уравнений (10.21):

$$\dot{K}_i = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{n \dot{I}'_2}{\dot{I}_1} = - \frac{j\omega M}{Z_n + j\omega \frac{M}{n}}, \quad (10.22)$$

$$\dot{K}_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{n} = \frac{w_2}{w_1}. \quad (10.22a)$$

Схема замещения совершенного трансформатора может быть получена из схемы рис. 10.2, в, если положить в ней $r_1 = r_2 = 0$ и $L_{s1} = L_{s2} = 0$.

Таким образом, в совершенном трансформаторе K_u зависит от параметров трансформатора n и M , нагрузки Z_n , и частоты ω , а K_i является постоянной величиной, равной отношению чисел витков обмоток трансформатора.

В идеальном трансформаторе отсутствуют потери мощности в обмотках ($r_1 = r_2 = 0$), потоки рассеяния $L_{s1} = L_{s2} = 0$ и магнитная проводимость магнитопровода $G_M \rightarrow \infty$. Это означает, что L_1 , L_2 и M также стремятся к бесконечности. Очевидно, что в этом случае намагничивающий ток $I_\mu = 0$, и уравнение идеального трансформатора согласно (10.17) принимает вид $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0$, откуда

$$\dot{I}_1 = -\dot{I}_2 = -\dot{I}_2 / n = -\dot{I}_2 \omega_2 / \omega_1. \quad (10.23)$$

Коэффициенты передачи по напряжению и току идеального трансформатора определяются выражениями

$$\dot{K}_u = 1/n = \dot{U}_2 / \dot{U}_1; \dot{K}_i = \dot{I}_2 / \dot{I}_1 = -n. \quad (10.24)$$

Идеальный трансформатор имеет независимые от частоты и нагрузки Z_n коэффициенты передачи по напряжению и току. Входное сопротивление идеального трансформатора равно приведенному к первичной обмотке сопротивлению нагрузки

$$Z_{вх} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = Z_n = n^2 Z_n. \quad (10.24a)$$

Это означает, что идеальный трансформатор преобразует без искажения напряжение \dot{U}_1 в напряжение $\dot{U}_2 = \dot{U}_1 / n$, а ток \dot{I}_1 в ток $\dot{I}_2 = -n\dot{I}_1$ с инверсией знака независимо от параметров нагрузки, присоединенной к вторичным зажимам трансформатора. Его можно представить эквивалентной схемой, содержащей источник вторичного напряжения, управляемый первичным напряжением \dot{U}_1 , и источник первичного тока, управляемый током во вторичной цепи \dot{I}_2 (рис. 10.2, г).

Реальные трансформаторы, поскольку их коэффициенты передачи K_u и K_i являются частотно-зависимыми величинами, передают входные сигналы с искажениями по форме. Чтобы приблизить свойства трансформатора к свойствам идеального трансформатора, следует уменьшать сопротивления обмоток r_1 , r_2 , улучшать магнитную связь между обмотками, стремясь уменьшить потоки рассеяния Φ_{s1} , Φ_{s2} . Трансформатор является универсальным четырехполюсным элементом и используется для преобразования переменного напряжения, тока и сопротивления.

Пример 10.1. Определить токи и напряжения в трансформаторе, нагруженном на сопротивление r_n , у которого отсутствуют потери $r_1 = r_2 = 0$ и потоки рассеяния $L_{\sigma 1} = L_{\sigma 2} = 0$, при действии на первичных зажимах коротких импульсов напряжения и тока, которые могут быть представлены с помощью импульсных функций.

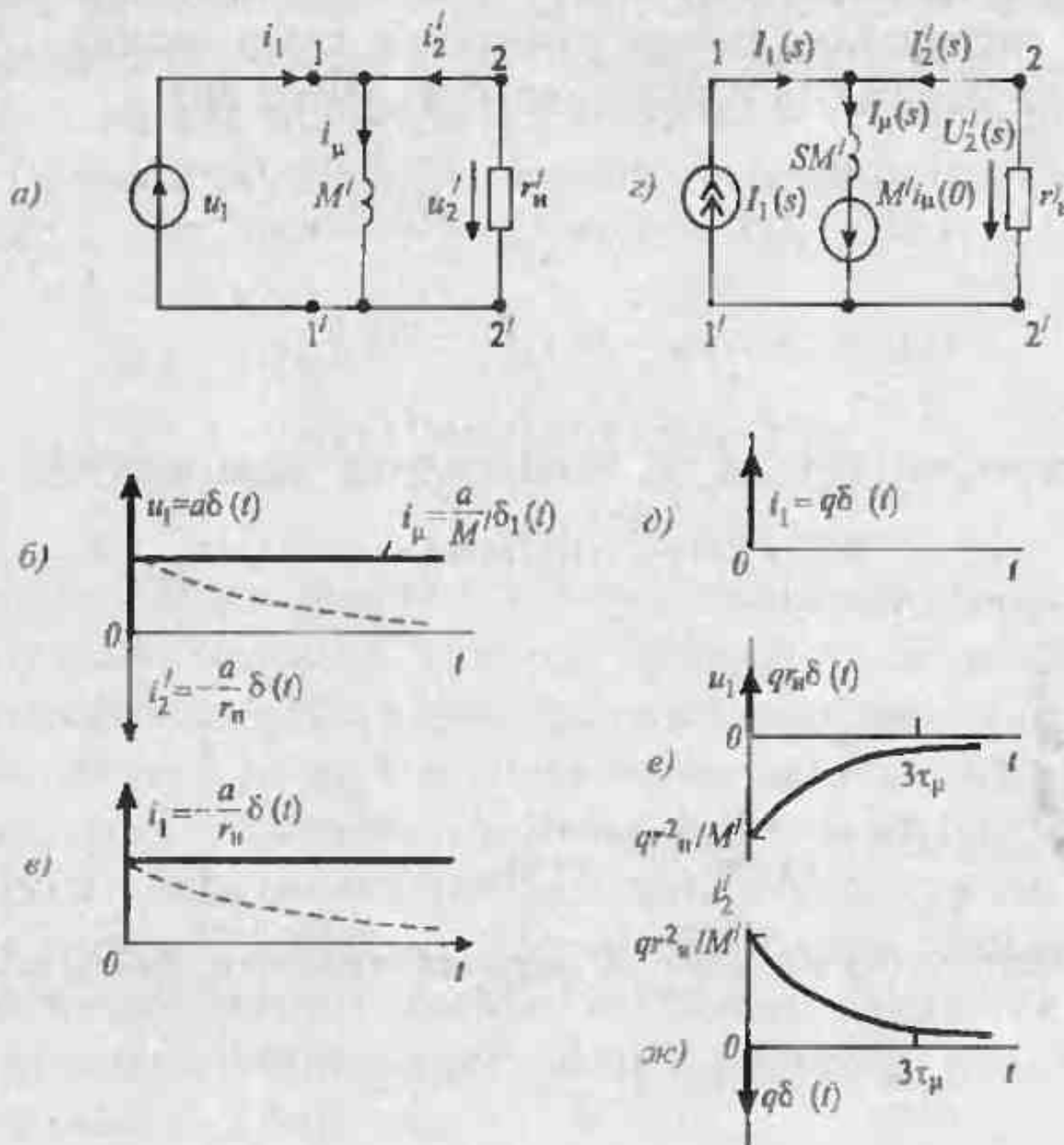


Рис. 10.3. Схема замещения идеального трансформатора (а), импульсная (б) и переходная (в) характеристики, схема замещения (z) и ее импульсные характеристики (д, е, ж)

Решение. Представим входной импульс напряжения в виде $u_1 = a\delta(t)$. Воспользуемся схемой замещения приведенного идеального трансформатора (рис. 10.3,а) для определения токов i_1 и i_2' . Уравнения Кирхгофа для схемы имеют вид:

$$u_1 = u_2' = M' \frac{di_\mu}{dt} = M' \frac{d(i_1 + i_2')}{dt} = -r_n' i_2'$$

$$i_\mu = \frac{1}{M'} \int_0^t u_1 dt = \frac{a}{M'} \int_0^t \delta(t) dt = \frac{a}{M'} \delta_1(t)$$

Ток в первичной обмотке трансформатора

$$i_1 = i_\mu - i_2' = i_\mu + \frac{u_1}{r_n'} = \frac{a}{M'} \delta_1(t) + \frac{a}{r_n'} \delta(t)$$

состоит из ступенчатой и импульсной составляющих, которые проходят соответственно по ветви намагничивания M' и ветви вторичной обмотки r'_n (рис. 10.3, б, в). Ступенчатая составляющая i_μ тока i_1 в реальном трансформаторе из-за потерь в первичной цепи будет затухающей (штриховые линии на рис. 10.3 б, в).

Представим входной импульс тока в виде $i(t) = q\delta(t)$. Для расчета реакции воспользуемся операторной схемой замещения совершенного трансформатора (рис. 10.3, з). Изображения уравнений Кирхгофа имеют вид:

$$I_1(s) = I_\mu(s) - I'_2(s) = I_\mu(s) + \frac{U_1(s)}{r'_n} = q;$$

$$U_1(s) = sM' I_\mu(s) - M' I'_2(0) = sM' I_\mu(s) -$$

$$- M' [i'_2(0) + i_1(0)] = sM' I_\mu(s);$$

$$I_\mu(s) + \frac{M'}{r'_n} s I_\mu(s) = q,$$

откуда

$$I_\mu(s) = \frac{q}{1 + sM'/r'_n} = \frac{q}{1 + s\tau_\mu}; \tau_\mu = \frac{M'}{r'_n}.$$

Мгновенное значение тока находим по формуле обратного преобразования Лапласа

$$i_\mu = \mathcal{L}^{-1}[I_\mu(s)] = \frac{q}{\tau_\mu} e^{-t/\tau_\mu} \delta_1(t).$$

Напряжение на входе трансформатора

$$u_1 = M' \frac{di_\mu}{dt} = \frac{M' q}{\tau_\mu} \frac{d[e^{-t/\tau_\mu} \delta_1(t)]}{dt} =$$

$$= qr'_n \left[e^{-t/\tau_\mu} \delta_1(t) + \left(-\frac{1}{\tau_\mu} \right) e^{-t/\tau_\mu} \delta_1(t) \right] =$$

$$= \left[qr'_n \delta_1(t) - \delta_1(t) \frac{qr'_n}{M'} \right] e^{-t/\tau_\mu}.$$

Ток в нагрузке

$$i'_2 = -u_1 / r'_n = [-q\delta_1(t) + qr'_n / M'] e^{-t/\tau_\mu} = i_2 / n.$$

Импульс задающего тока $i_1(t)$ площадью $q\delta(t)$ (рис. 10.3, *д*) вызывает появление такого же по значению и противоположного по знаку импульса тока i_2' во вторичной обмотке при $t = 0$.

При $t \geq 0$ ток i_2' меняет свой знак и мгновенно достигает значения qr_n/M' , а затем убывает по экспоненте, замыкаясь по намагничивающей ветви M' схемы замещения трансформатора (рис. 10.3, *ж*). Площадь импульса напряжения, возникающего в начале процесса на обмотке w_1 трансформатора, равна qr_n (рис. 10.3, *е*). Переходный процесс передачи импульса тока в основном закончится в течение $t = 3\tau_\mu$.

Лекция 11. Активные элементы в электрической цепи

Как уже отмечалось в лекции 6 за последнее время существенное значение приобрели активные элементы, которые отличаются от рассмотренных в лекциях 7–10 пассивных элементов тем, что они способны осуществлять усиление сигналов по мощности за счет использования энергии сторонних источников напряжения или тока. Большинство этих элементов имеют модели, которые в линейном режиме описываются теорией четырехполюсников.

Уравнения и схемы замещения четырехполюсных элементов вводятся для моделирования разнообразных электронно-электротехнических устройств, служащих для передачи электрической энергии и преобразования определенным образом электрических сигналов.

Четырехполюсник представляет собой пассивную или активную цепь (без независимых источников), имеющую четыре внешних вывода — полюса (два входных 1–1' и два выходных 2–2') (рис. 11.1), которыми она присоединяется к источникам или узлам остальной части электрической цепи. Процессы в четырехполюснике исследуются по отношению к внешним полюсам путем установления соотношений между входными u_1 и i_1 , выходными u_2 и i_2 напряжениями и токами. Любую пару из указанных четырех переменных можно принять за независимые переменные — воздействия x_1 и x_2 и выразить две другие величины — зависимые переменные или реакции y_1 и y_2 , через них и коэффициенты четырехполюсника w . Последние определяются параметрами

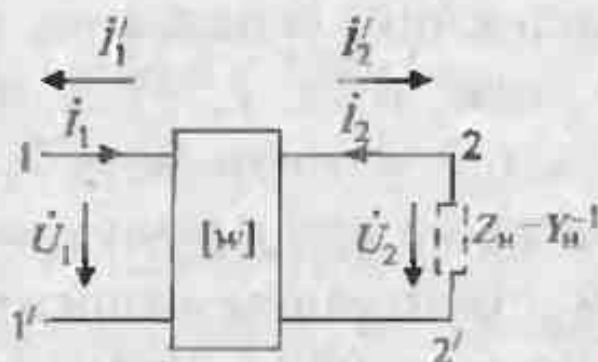


Рис. 11.1. Схема включения четырехполюсника

элементов и схемой их соединения внутри четырехполюсника. В зависимости от вида воздействий параметры четырехполюсника должны быть представлены в определенной форме. При гармонических воздействиях, заданных в комплексной форме, параметры четырехполюсника будут комплексными. При периодических негармонических воздействиях, заданных в комплексной форме, используются параметры четырехполюсника для k -х гармоник воздействий. При непериодических воздействиях, заданных в операторной форме, параметры четырехполюсника представляют в операторной форме. В дальнейшем для сокращения анализа будем использовать комплексные гармонические воздействия, реакции и комплексные параметры, однако полученные выражения будут справедливы и при других видах воздействий после соответствующей замены переменных и параметров.

В любом четырехполюснике зависимые y_1, y_2 и независимые x_1, x_2 переменные связаны уравнениями:

$$\begin{cases} y_1 = w_{11}x_1 + w_{12}x_2 \\ y_2 = w_{21}x_1 + w_{22}x_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (11.1)$$

Если воздействиями являются комплексные токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 , а реакциями — комплексные напряжения \dot{U}_1 и \dot{U}_2 , то уравнения четырехполюсника имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2, \end{cases} \quad (11.2)$$

где $Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22}$ — комплексные Z -параметры (коэффициенты) четырехполюсника в режиме холостого хода.

Уравнения (11.2) по форме совпадают с уравнениями (10.13) трансформатора, который можно рассматривать как пассивный четырехполюсник. Очевидно, что аналогичную форму имеют уравнения (10.10) при периодических негармонических воздействиях, а также операторные уравнения (10.11) при нулевых начальных условиях.

Z -параметры четырехполюсника определяем, полагая один из токов воздействия равным нулю. Так, при токе $\dot{I}_2 = 0$ получаем: $Z_{11} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 \Big|_{\dot{I}_2=0}$, а $Z_{21} = \dot{U}_2 / \dot{I}_1 \Big|_{\dot{I}_2=0}$, откуда следует, что параметр Z_{11} представляет собой *входное сопротивление четырехполюсника при разомкнутых выходных зажимах*. Параметр Z_{21} , характеризуемый отношением напряжения \dot{U}_2 реакции к току \dot{I}_1 воздействия, называют *сопротивлением прямой передачи четырехполюсника при разомкнутых выходных зажимах*.

Полагая ток \dot{I}_1 воздействия равным нулю, найдем: $Z_{22} = \dot{U}_2 / \dot{I}_2 \Big|_{\dot{I}_1=0}$, $Z_{12} = \dot{U}_1 / \dot{I}_2 \Big|_{\dot{I}_1=0}$, откуда следует, что параметр Z_{22} представляет собой *выходное сопротивление четырехполюсника при разомкнутых входных зажимах*, а параметр Z_{12} , характеризующий отношением напряжения \dot{U}_1 реакции к току \dot{I}_2 воздействия, называют *сопротивлением обратной передачи четырехполюсника при разомкнутых выходных зажимах*.

Если воздействиями являются напряжения \dot{U}_1 и \dot{U}_2 , а реакциями — токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 , то уравнения четырехполюсника имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2, \end{cases} \quad (11.3)$$

где Y_{11} , Y_{12} , Y_{21} , Y_{22} — комплексные Y -параметры четырехполюсника в режиме короткого замыкания.

Уравнения (11.3) могут быть получены из уравнений (11.2) при взаимной замене переменных. Поэтому Y -параметры можно найти по известным Z -параметрам.

Y -параметры четырехполюсника определяем, полагая одно из напряжений воздействий равным нулю. Так, при $\dot{U}_2 = 0$ получаем: $Y_{11} = \dot{I}_1 / \dot{U}_1 \Big|_{\dot{U}_2=0}$, а $Y_{21} = \dot{I}_2 / \dot{U}_1 \Big|_{\dot{U}_2=0}$, откуда следует, что параметр Y_{11} представляет собой *входную проводимость четырехполюсника при закороченных выходных зажимах*. Параметр Y_{21} , характеризующий отношением тока \dot{I}_2 реакции к напряжению \dot{U}_1 воздействия, называют *проводимостью прямой передачи четырехполюсника при закороченном выходе*.

Аналогично, полагая $\dot{U}_1 = 0$, получаем: $Y_{22} = \dot{I}_2 / \dot{U}_2 \Big|_{\dot{U}_1=0}$, $Y_{12} = \dot{I}_1 / \dot{U}_2 \Big|_{\dot{U}_1=0}$, откуда следует, что параметр Y_{22} представляет собой *выходную проводимость четырехполюсника при закороченных входных зажимах*, а параметр Y_{12} , характеризующий отношением тока \dot{I}_1 реакции к напряжению \dot{U}_2 воздействия, называют *проводимостью обратной передачи четырехполюсника при закороченном входе*.

Если воздействиями являются напряжение \dot{U}_1 и ток \dot{I}_2 , а реакциями — напряжение \dot{U}_2 и ток \dot{I}_1 , то уравнения четырехполюсника принимают вид:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2, \end{cases} \quad (11.4)$$

где G_{11} , G_{12} , G_{21} , G_{22} — комплексные G -параметры четырехполюсника.

Уравнения (11.4) могут быть получены из уравнений (11.2) или (11.3) при взаимной замене переменных. Отсюда следует, что G -параметры могут быть

выражены по известным Z - или Y -параметрам. G -параметры четырехполюсника определяем, полагая одно из воздействий равным нулю. Так, при $\dot{I}_2 = 0$ получаем: $G_{11} = \dot{I}_1 / \dot{U}_1 |_{\dot{I}_2=0}$, а $G_{21} = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 |_{\dot{I}_2=0}$, откуда следует, что G_{11} представляет собой входную проводимость четырехполюсника при разомкнутых выходных зажимах. Параметр G_{21} , характеризуемый отношением напряжения \dot{U}_2 реакции к напряжению \dot{U}_1 воздействия, называют коэффициентом прямой передачи четырехполюсника по напряжению в режиме холостого хода.

Аналогично, полагая $\dot{U}_1 = 0$, находим: $G_{22} = \dot{U}_2 / \dot{I}_1 |_{\dot{U}_1=0}$, $G_{12} = \dot{I}_1 / \dot{I}_2 |_{\dot{U}_1=0}$, откуда следует, что параметр G_{22} представляет собой выходное сопротивление при замкнутых входных зажимах, а параметр G_{12} , характеризуемый отношением тока \dot{I}_1 реакции к току \dot{I}_2 воздействия, называют коэффициентом обратной передачи четырехполюсника по току при замкнутом входе.

Идеальный трансформатор может быть представлен как четырехполюсник в G -параметрах. Сравнивая уравнения трансформатора $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2 / n$ и $\dot{U}_2 = \dot{U}_1 / n$ с уравнениями (4.88), получим для идеального трансформатора: $G_{11} = G_{22} = 0$, $G_{12} = -1/n$, $G_{21} = 1/n$. Таким образом, идеальный трансформатор может быть представлен схемой замещения ИТУТ и ИНУН, изображенной на рис.10.2, г.

Если воздействиями являются ток \dot{I}_1 , и напряжение \dot{U}_2 , а реакциями — ток \dot{I}_2 и напряжение \dot{U}_1 , то уравнения четырехполюсника имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2, \end{cases} \quad (11.5)$$

где H_{11} , H_{12} , H_{21} , H_{22} — комплексные H -параметры четырехполюсника.

Уравнения (11.5) могут быть получены при взаимной замене переменных в уравнениях (11.3), (11.4), поэтому H -параметры могут быть определены по известным Z -, Y - или G -параметрам.

H -параметры четырехполюсника определяем, полагая одно из воздействий равным нулю. Так, при $\dot{U}_2 = 0$ получаем $H_{11} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 |_{\dot{U}_2=0}$ и $H_{21} = \dot{I}_2 / \dot{I}_1 |_{\dot{U}_2=0}$, откуда следует, что H_{11} представляет собой входное сопротивление четырехполюсника при замкнутых выходных зажимах. Параметр H_{21} , характеризуемый отношением тока \dot{I}_2 реакции к току \dot{I}_1 воздействия, называют коэффициентом прямой передачи четырехполюсника по току при замкнутом выходе.

Полагая $\dot{I}_1 = 0$, находим: $H_{22} = \dot{I}_2 / \dot{U}_2 |_{\dot{I}_1=0}$, $H_{12} = \dot{U}_1 / \dot{U}_2 |_{\dot{I}_1=0}$, откуда следует, что параметр H_{22} представляет собой выходную проводимость четырехполюсника при разомкнутом входе, а параметр H_{12} , характеризуемый отношением напряжения \dot{U}_1 реакции к напряжению \dot{U}_2 воздействия, называют коэффициентом обратной передачи четырехполюсника по напряжению при разомкнутом входе.

Кроме рассмотренных формул, четырехполюсник можно также описать системами уравнений с A - и B -параметрами:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2, & \dot{U}_2 = B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}\dot{I}_1, \\ \dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2, & \dot{I}_2 = B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{I}_1. \end{cases} \quad (11.6)$$

A - и B -параметры четырехполюсника характеризуют только передаточные функции и не содержат входных и выходных параметров. Применимость той или иной системы параметров зависит от типа элемента и структуры исследуемой цепи.

Для определения схемных функций $Y_{\text{вх}} = \dot{I}_1 / \dot{U}_1$, K_i и K_u через Y -параметры четырехполюсника и сопротивление нагрузки воспользуемся системой (11.3). Из второго уравнения этой системы, дополненного выражением $\dot{I}_2 = -Y_n \dot{U}_2$, получим

$$K_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{-Y_{21}}{Y_{22} + Y_n}, \quad (11.7)$$

а подставляя $\dot{U}_2 = K_u \dot{U}_1$ в первое уравнение, найдем

$$Y_{\text{вх}} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22} + Y_n} = \frac{|Y| + Y_{11}Y_n}{Y_{22} + Y_n}, \quad (11.8)$$

где $|Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$.

Коэффициент передачи по току

$$K_i = \frac{Y_{21}Y_n}{|Y| + Y_{11}Y_n}, \quad (11.9)$$

Схемные функции четырехполюсников $Z_{\text{вх}}$, K_u и K_i могут быть выражены через коэффициенты в любой из форм уравнений подобно тому, как это было сделано для Y -параметров. Схемные функции определяются не только параметрами четырехполюсника, которые могут быть найдены экспериментально по опытам холостого хода и короткого замыкания, но и параметрами нагрузки Z_n . Между ними существует взаимная связь. Действительно,

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1, \text{ но } \dot{I}_1 = \dot{I}_2 / K_i, \dot{U}_1 = K_u \dot{U}_2; \dot{U}_2 = -\dot{I}_2 Z_n \text{ и} \\ -Z_{\text{вх}} / Z_n = K_i / K_u. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Схемы замещения четырехполюсников можно получить путем непосредственного представления слагаемых в уравнениях соответствующими элементами схемы. При этом члены, соответствующие параметрам прямой и обратной передач, заменяют управляемыми источниками напряжения или тока.

Уравнениям четырехполюсника с Z -параметрами соответствует схема замещения, приведенная на рис. 11.2,а.

Эта модель содержит два комплексных пассивных сопротивления Z_{11} и Z_{22} и два управляемых источника напряжения $Z_{21}\dot{I}_1$ и $Z_{12}\dot{I}_2$. Первый источник учи-

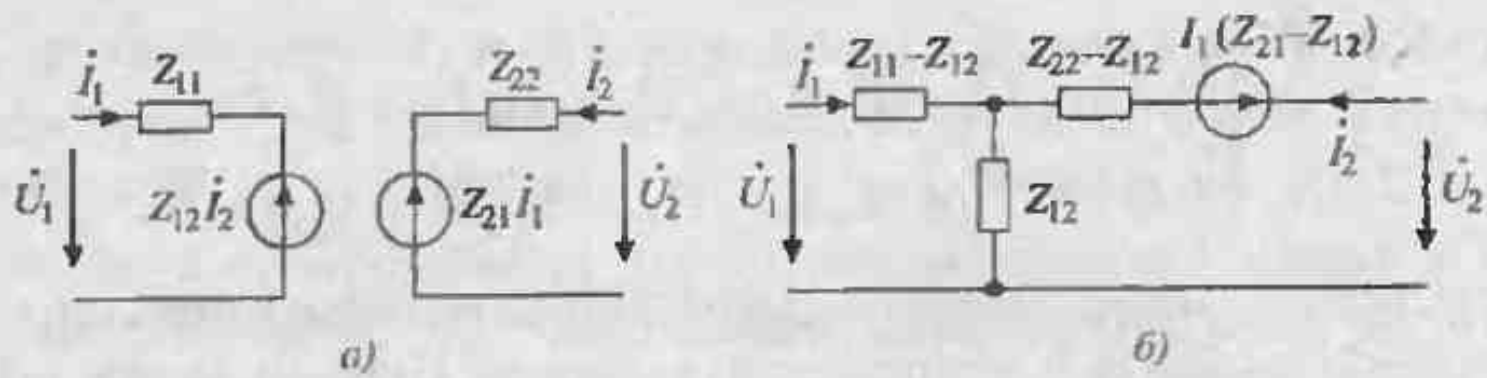


Рис. 11.2. Схемы четырехполюсника в Z -параметрах: с двумя источниками (а) и с одним источником (б)

тывает сопротивление прямой передачи от входа к выходу, второй — сопротивление обратной передачи от выхода к входу. Путем преобразования уравнений (4.86) к виду

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (Z_{11} - Z_{12})\dot{I}_1 + Z_{12}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2), \\ \dot{U}_2 = (Z_{21} - Z_{12})\dot{I}_1 + (Z_{22} - Z_{12})\dot{I}_2 + Z_{12}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2), \end{cases} \quad (11.11)$$

получим схему замещения с одним управляемым источником напряжения $(Z_{21} - Z_{12})\dot{I}_1$, изображенную на рис. 11.2, б.

Уравнениям четырехполюсника с Y -параметрами соответствует эквивалентная схема, приведенная на рис. 11.3, а

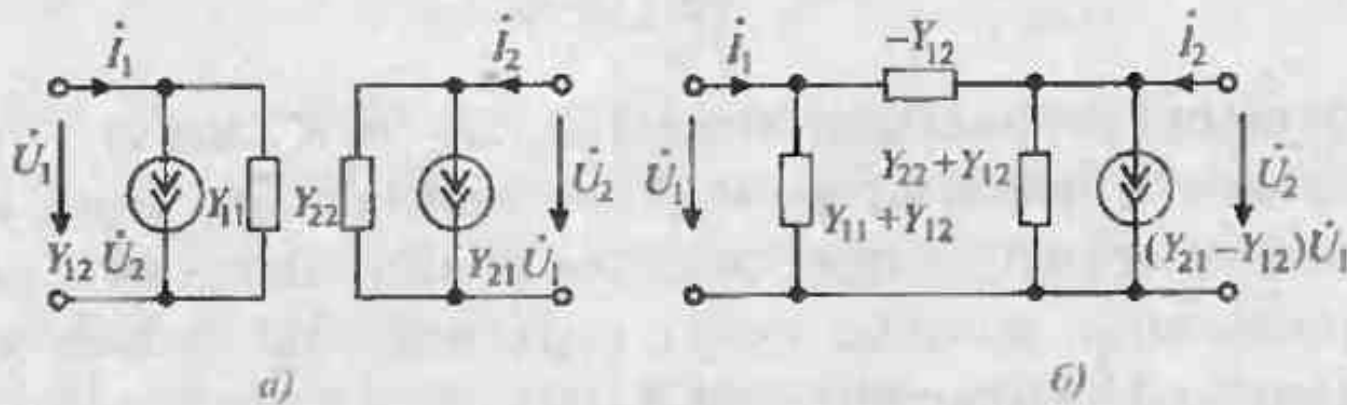


Рис. 11.3. Схемы замещения четырехполюсника в Y -параметрах: с двумя источниками (а) и с одним источником (б)

Эта модель содержит две комплексные пассивные проводимости Y_{11} и Y_{22} и два управляемых источника тока $Y_{21}\dot{U}_1$ и $Y_{12}\dot{U}_2$. Первый источник учитывает проводимость прямой передачи от входа к выходу, второй — проводимость обратной передачи от выхода к входу.

Путем преобразования уравнений (11.3) получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = (Y_{11} + Y_{12})\dot{U}_1 - (\dot{U}_1 - \dot{U}_2)Y_{12}, \\ \dot{I}_2 = (Y_{21} - Y_{12})\dot{U}_2 + (Y_{22} + Y_{12})\dot{U}_2 - (\dot{U}_1 - \dot{U}_2)Y_{12}, \end{cases} \quad (11.12)$$

которой соответствует схема замещения четырехполюсника с одним управляемым источником тока $(Y_{21} - Y_{12})\dot{U}_1$, изображенная на рис. 11.3, б.

Эквивалентная схема четырехполюсника с G -параметрами приведена на рис. 11.4. Эта схема содержит два пассивных элемента G_{11} , G_{22} и два управляемых источника: источник напряжения $G_{21}\dot{U}_1$, и источник тока $G_{12}\dot{I}_2$.

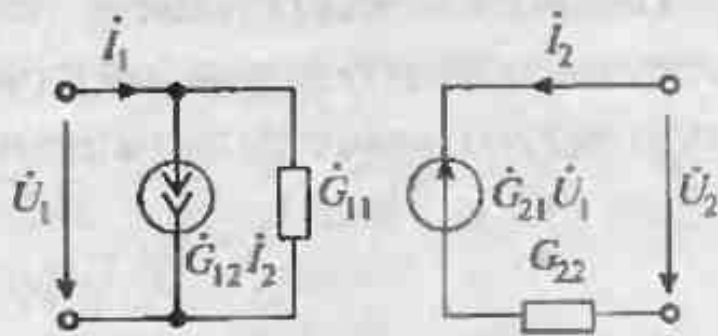


Рис 11.4. Схема замещения четырехполюсника в G -параметрах

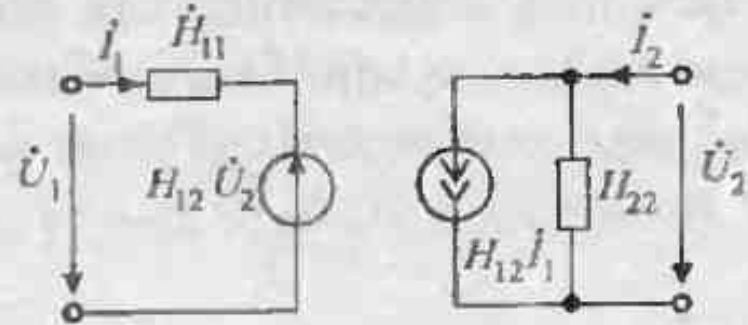


Рис 11.5. Схема замещения четырехполюсника в H -параметрах

Аналогично, для четырехполюсника с H -параметрами (4.89) получаем модель, содержащую два пассивных элемента H_{11} , H_{22} и два управляемых источника: источник тока $H_{21}\dot{I}_1$ и источник напряжения $H_{12}\dot{U}_2$ (рис. 11.5).

Рассмотренные формы уравнений и схемы замещения четырехполюсника применяют при создании моделей активных элементов в линейном режиме. Используя T - и H -образные схемы замещения четырехполюсника (рис. 11.2, 11.3), можно установить связь между первичными и вторичными параметрами четырехполюсника, через которые определяются его схемные функции.

Идеальные управляемые источники напряжения и тока являются четырехполюсными активными элементами однонаправленного действия (от входа к выходу), которые имеют лишь один коэффициент в общей матрице параметров четырехполюсника $[w]$ (11.1), отличный от нуля: $w_{21} = K$. Для каждого из управляемых источников существует лишь две формы уравнений четырехполюсника: A -форма и одна из Y -, Z -, G - или H -форм. Так, матрицы A - и H -параметров для ИТУТ имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/K_i \end{bmatrix}; \quad [H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_i & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим теперь некоторые активные четырехполюсные элементы, работающие в линейном режиме.

Электроракуумный триод имеет три электрода: катод (к), анод (а) и сетку (с). Условное графическое обозначение триода представлено на рис. 11.6, а. В соответствии с принципом действия триода в рабочем режиме от анода к катоду проходит ток I_a , который управляется напряжением U_c , приложенным между сеткой и катодом, поэтому электроракуумный триод можно рассматривать как источник тока, управляемый напряжением. Электроракуумный триод

удобно описывать в системе Y -параметров четырехполюсника. При работе на низкой частоте или на постоянном токе Y -параметры четырехполюсника оказываются вещественными. В большинстве случаев ток сетки триода ничтожно мал, а значит, $Y_{11} = Y_{12} = 0$. При этом цепь сетки превращается в изолированный зажим, а модель триода как активного четырехполюсника (см. рис. 11.3, а) принимает вид, показанный на рис. 11.6, б. Проводимость прямой передачи электровакуумного триода обычно называют крутизной его вольт-амперной характеристики и обозначают $Y_{21} = S$, а выходную проводимость называют внутренней и обозначают $Y_{22} = g_i$.

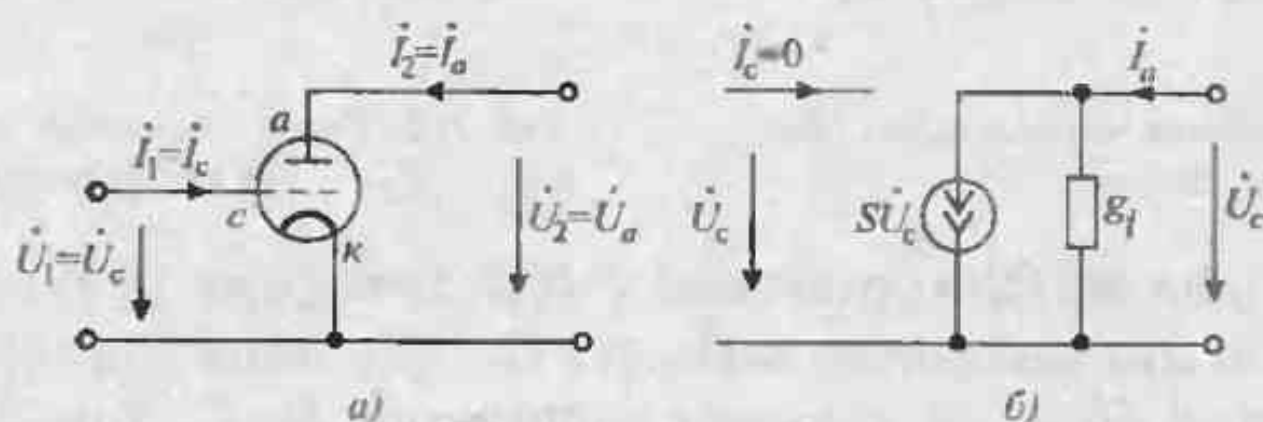


Рис. 11.6 Электровакуумный триод (а) и его схема замещения (б)

Биполярный транзистор имеет три электрода: эмиттер (э), коллектор (к) и базу (б). Условное графическое обозначение биполярного транзистора представлено на рис. 11.7, а.

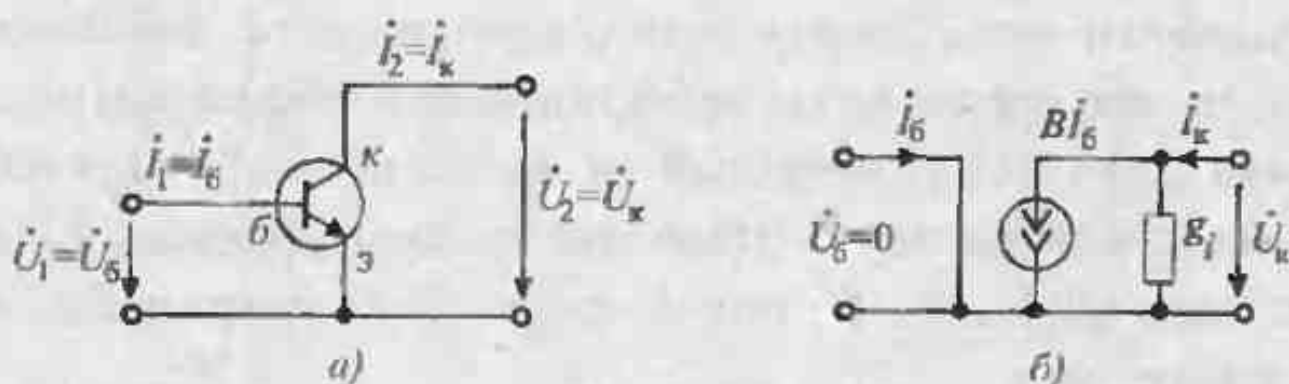


Рис. 11.7. Биполярный транзистор (а) и его схема замещения (б)

В соответствии с принципом действия биполярного транзистора в рабочем режиме от коллектора к эмиттеру проходит ток I_k , который управляется током I_b , проходящим между базой и эмиттером. Биполярный транзистор можно рассматривать как источник тока, управляемый током базы. Биполярный транзистор удобно описывать в системе H -параметров четырехполюсника. При работе на низкой частоте или на постоянном токе H -параметры транзистора оказываются вещественными. В большинстве случаев напряжение между базой и эмиттером транзистора ничтожно мало, а значит, $H_{11} = H_{12} = 0$. При этом база замыкается на эмиттер, а модель биполярного транзистора как активного четырехполюсника принимает вид, показанный на рис. 11.7, б. Коэффициент прямой передачи тока обычно называют коэффициентом усиления тока и

обозначают $H_{21} = B$, а выходную проводимость называют внутренней и обозначают $H_{22} = g_i$.

Униполярный транзистор аналогично биполярному имеет три электрода: исток (и), сток (с) и затвор (з). Условное графическое обозначение униполярного транзистора представлено на рис. 11.8, а. В соответствии с принципом действия униполярного транзистора в канале между стоком и истоком проходит ток I_c , который управляется напряжением, приложенным между затвором и истоком, поэтому униполярный транзистор подобно электровакуумному триоду можно рассматривать как источник тока, управляемый напряжением между затвором и истоком.

Униполярный транзистор, как и электровакуумный триод, удобно описывать в системе Y -параметров четырехполюсника. Так как ток затвора униполярного транзистора ничтожно мал, то $Y_{11} = Y_{12} = 0$, и модель униполярного транзистора оказывается подобной модели электровакуумного триода (рис. 11.8, б).

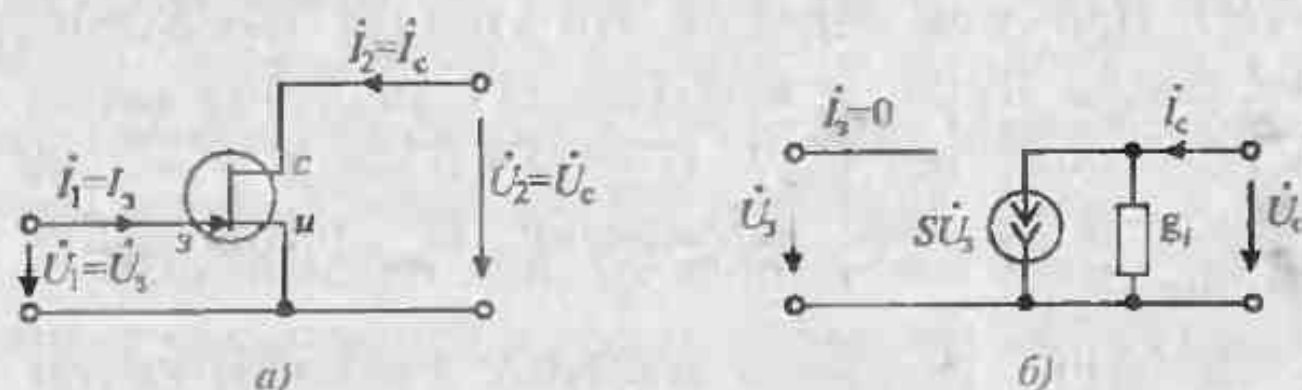


Рис. 11.8 Униполярный транзистор (а) и его схема замещения (б)

Интегральный операционный усилитель можно рассматривать как самостоятельный активный элемент, состоящий из более простых активных элементов — биполярных и униполярных транзисторов. При анализе схем с операционными усилителями их можно считать источниками напряжения, управляемыми напряжением, полагая параметр обратной передачи $G_{12} = 0$. Условное обозначение операционного усилителя представлено на рис. 11.9, а. Различают операционные усилители без инвертирования и с инвертированием входного напряжения $U_{вх}$. Для усилителей без инвертирования (рис. 11.9, а) полярности входного и выходного напряжений одинаковы. Для усилителей с инвертированием (рис. 11.9, б) полярности входного и выходного напряжений противоположны (т. е. усилитель изменяет фазу выходного напряжения на 180°). Кроме того, применяют операционные усилители с дифференциальным входом (рис. 11.9, в), имеющие как прямой, так и инверсный входы. Такой усилитель можно рассматривать как сочетание неинвертирующего и инвертирующего усилителей со сложением выходных напряжений и $U_{вых} = A(U_{вх1} - U_{вх2})$.

Операционный усилитель удобно описывать в системе G -параметров четырехполюсника. При работе на низкой частоте или на постоянном токе G -параметры операционного усилителя вещественны. Параметр прямой передачи называют

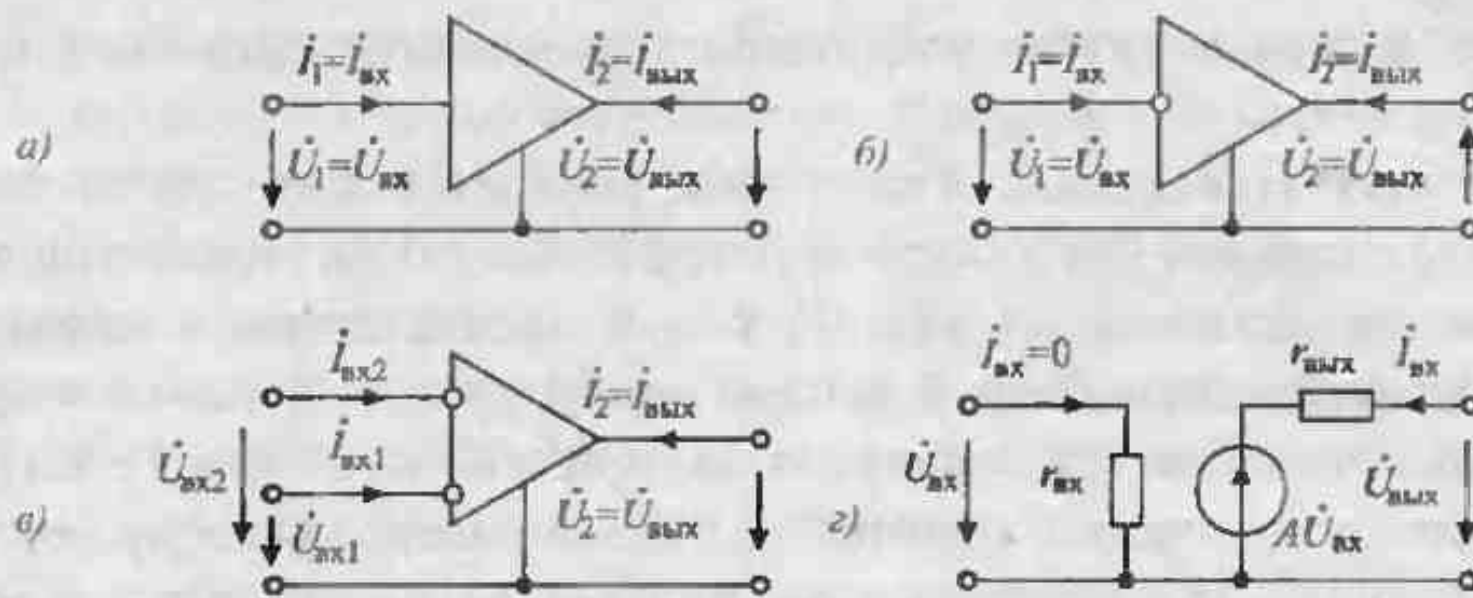


Рис. 11.9. Неинвертирующий (а), инвертирующий (б), дифференциальный (в) операционный усилитель и схема замещения (г)

коэффициентом усиления по напряжению и обозначают $G_{21} = A$. Модель операционного усилителя как активного четырехполюсника приведена на рис. 11.9,г.

В большинстве практических случаев характеристики операционного усилителя идеализируют. При этом считают, что входная проводимость и выходное сопротивление равны нулю, а коэффициент усиления имеет бесконечно большое значение, т. е. полагают $G_{11} = G_{22} = 0$; $G_{21} = A = \infty$. Для идеального операционного усилителя входное напряжение $\dot{U}_{вх}$ равно нулю при любом выходном напряжении $\dot{U}_{вых}$.

В отличие от идеальных реальные активные элементы имеют небольшую обратную передачу и их входные и выходные параметры не равны нулю. Кроме того, параметры прямой передачи имеют частотную зависимость. Первой причиной частотной зависимости является влияние реактивностей элементов конструкции (межэлектродных емкостей, индуктивностей выводов). Эти элементы образуют частотно-зависимые делители и создают внутреннюю обратную связь. Второй причиной частотной зависимости является зависимость механизма работы активного элемента от частоты колебаний (скорости перемещения зарядов и их неравномерной плотности).

Для учета частотной зависимости активных элементов можно либо вводить в модели управляемые источники с частотно-зависимым параметром прямой передачи, либо использовать частотно-независимые параметры прямой передачи и соответственно подобранные внешние цепи, которые создают требуемую частотную зависимость.

Так, частотно-зависимый источник напряжения, управляемый напряжением (операционный усилитель), с коэффициентом прямой передачи напряжения

$$A(\omega) = A_0 / (j\omega\tau) \quad (11.13)$$

можно заменить источником с частотно-независимым коэффициентом прямой передачи напряжения A_0 и внешней частотно-зависимой пассивной цепью, для которой выполняется условие (11.13), как показано на рис. 11.10, где $\tau = RC$.

Высокочастотная модель электровакуумного триода и униполярного транзистора, приведенная на рис. 11.10, содержит три межэлектродные емкости C_1 , C_2 и C_3 .

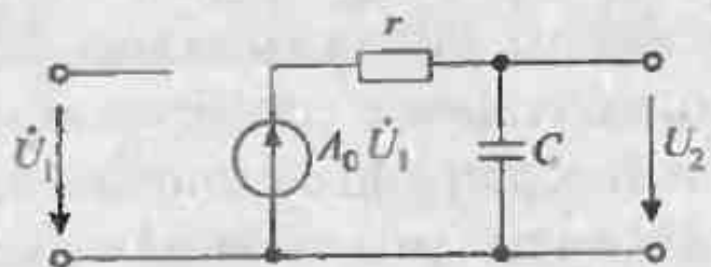


Рис. 11. 10. Высокочастотная модель операционного усилителя

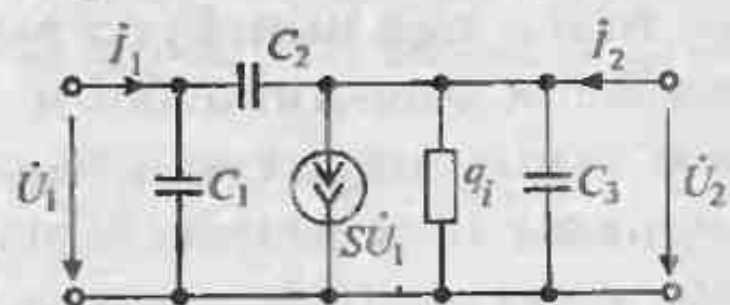


Рис. 11. 11. Высокочастотная модель униполярного транзистора

Лекция 12. Преобразователи сопротивлений и проводимостей пассивных элементов

Активные преобразователи позволяют изменить значение или характер сопротивлений или проводимостей пассивных двухполюсных элементов: резистивных, индуктивных или емкостных. К таким преобразователям относят *конверторы* и *инверторы* сопротивлений и проводимостей. Схема активного преобразователя сопротивлений или проводимостей приведена на рис. 12.1.

Конвертором сопротивления называют активный четырехполюсник, преобразующий некоторый двухполюсник с сопротивлением $Z_{\text{н}}$ в двухполюсник с сопротивлением $Z_{\text{вх}} = \pm \gamma Z_{\text{н}}$, где γ — вещественная положительная величина, называемая коэффициентом конверсии. Аналогично, конвертором проводимости называют четырехполюсник, который преобразует двухполюсник с проводимостью $Y_{\text{н}}$ в двухполюсник с проводимостью $Y_{\text{вх}} = \pm \gamma Y_{\text{н}}$.

Инвертором (гиратором) сопротивления называют активный четырехполюсник, преобразующий некоторый двухполюсник с сопротивлением $Z_{\text{н}}$ в двухполюсник с сопротивлением $Z_{\text{вх}} = \pm Z_{\text{г}}^2 Z_{\text{н}}^{-1}$, где $Z_{\text{г}}$ — сопротивление инверсии (гирации). Аналогично, инвертором проводимости называют четырехполюсник, который преобразует двухполюсник с проводимостью $Y_{\text{н}}$ в двухполюсник с проводимостью $Y_{\text{вх}} = \pm Y_{\text{г}}^2 Y_{\text{н}}^{-1}$.

Из определения конвертора сопротивления следует, что входное сопротивление четырехполюсника с нагрузкой $R_{\text{н}}$ может быть как положительным, так и отрицательным. При этом конвертор положительного сопротивления изменяет только значение сопротивления двухполюсника нагрузки, а конвертор отрицательного сопротивления изменяет не только значение, но и знак.

Сопротивление бывает положительным, если с возрастанием тока в нем растет и падение напряжения. Если же с ростом тока падение напряжения на сопротивлении уменьшается, то оно является отрицательным.

Вольт-амперная характеристика одного из таких сопротивлений приведена на рис. 12.2. Отрицательным это сопротивление является в области *Б*, где с

ростом приложенного напряжения ток уменьшается. Если включить отрицательное сопротивление в цепь последовательно с положительным, то увеличение тока в этой цепи будет вызывать уменьшение падения напряжения на отрицательном сопротивлении и увеличение напряжения на положительном. При этом сумма напряжений на положительном и отрицательном сопротивлениях постоянна, а увеличение мощности, расходуемой в положительном сопротивлении, компенсируется мощностью, вносимой отрицательным сопротивлением. Таким образом, отрицательное сопротивление не расходует энергию, а как бы вносит свою энергию в цепь, откуда оно и названо отрицательным. В действительности в цепях с отрицательным сопротивлением используется только энергия имеющихся в них источников, а отрицательное сопротивление выполняет ее перераспределение между элементами цепи.



Рис. 12.1. Схема активного преобразователя сопротивлений и проводимостей

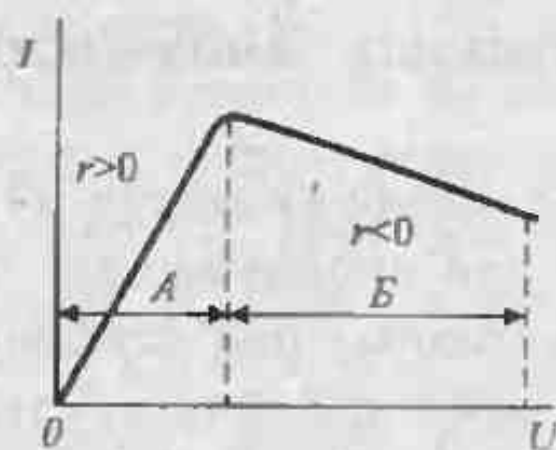


Рис. 12.2. К понятию отрицательного сопротивления

Наиболее часто конверторы сопротивлений реализуются на управляемых источниках напряжения или тока. Схема конвертора сопротивления с управляемым источником напряжения приведена на рис. 12.3, а. В этой схеме управляемый источник напряжения $\dot{E} = K_u \dot{U}_1$ соединен последовательно с сопротивлением нагрузки Z_n , а уравнения схемы имеют вид

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{E}, \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{U}_1 = \frac{1}{1 - K_u} \dot{U}_2, \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2. \end{cases} \quad (12.1)$$

Входное сопротивление такой схемы определяется выражением

$$Z_{вх} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = Z_n / (1 - K_u). \quad (12.2)$$

Таким образом, коэффициент конверсии схемы имеет значение

$$\gamma = (1 - K_u)^{-1}.$$

Если $K_u > 1$, то рассмотренная схема является конвертором отрицательного сопротивления, если же $K_u < 1$, то схема становится конвертором положитель-

ного сопротивления. При резистивной нагрузке конвертора $Z_{н} = R_{н}$ входное сопротивление будет положительным при $K_{н} < 1$ и отрицательным при $K_{н} > 1$.

Если нагрузка имеет индуктивный характер $Z_{н} = j\omega L_{н}$, то входное сопротивление также оказывается индуктивным:

$$L_{вх} = L_{н} / (1 - K_{н}).$$

При $K_{н} > 1$ входная индуктивность конвертора становится отрицательной ($L_{вх} < 0$).

Таким образом, одна и та же схема, приведенная на рис. 12.3,а, при различных значениях коэффициента передачи $K_{н}$ может быть конвертором как положительного, так и отрицательного сопротивления.

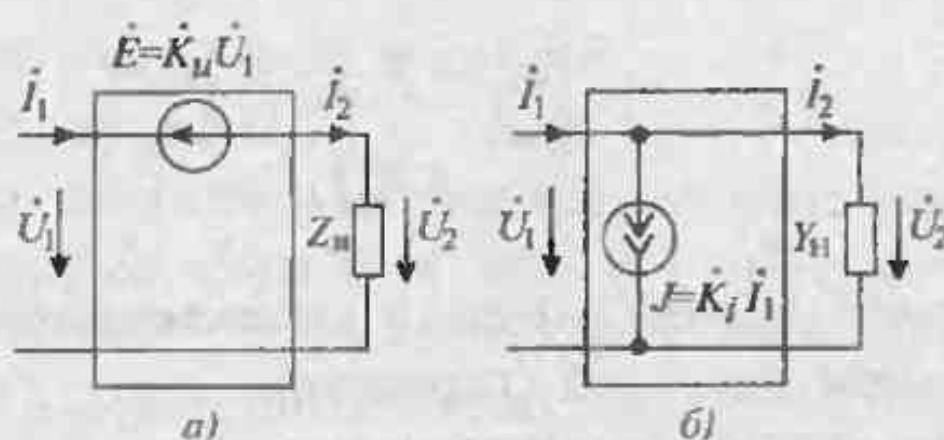


Рис. 12.3. Схемы конверторов сопротивления (а) и проводимости (б)

Аналогичные результаты получаем при использовании в четырехполоснике источника тока, управляемого током, как показано на рис. 12.3,б. Так как в этой схеме управляемый источник включен параллельно нагрузке, то уравнения схемы имеют вид

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2, \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{J}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2, \\ \dot{I}_1 = \frac{\dot{I}_2}{1 - \dot{K}_г}. \end{cases} \quad (12.3)$$

Входная проводимость схемы

$$Y_{вх} = \dot{I}_1 / \dot{U}_1 = Y_{н} / (1 - \dot{K}_г), \quad (12.4)$$

где $\dot{K}_г$ — коэффициент передачи управляемого источника по току.

При $\dot{K}_г > 1$ входная проводимость становится отрицательной, поэтому схема становится конвертором отрицательной проводимости. Так, например, если нагрузка четырехполосника $Y_{н} = g_{н}$ вещественная, то входная проводимость $Y_{вх} = g_{н} (1 - \dot{K}_г)^{-1} = g_{вх}$ будет отрицательной и вещественной. Если нагрузка имеет емкостный характер $Y_{н} = j\omega C_{н}$, то входная проводимость так-

же имеет емкостный характер, а сама входная емкость при $K_1 > 1$ становится отрицательной ($C_{\text{вх}} < 0$).

Таким образом, использование конверторов сопротивлений и проводимостей позволяет изменять масштаб положительных сопротивлений проводимостей, индуктивностей и емкостей, делать их отрицательными или равными нулю.

Инверторы сопротивлений и проводимостей также можно построить на управляемых источниках напряжения или тока. Схема инвертора сопротивления на двух источниках напряжения, управляемых током, приведена на рис. 12.4,а.

В этой схеме напряжения на зажимах четырехполюсника составленного из двух управляемых источников, имеют значения

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_1 \dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 = Z_r \dot{I}_1, \end{cases} \quad (12.5)$$

где Z_1 — сопротивление прямой передачи управляемых источников, которое и является сопротивлением инверсии (гирации).

Из (12.5) находим входное сопротивление

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_r^2 Z_{\text{н}}^{-1}, \quad (12.6)$$

где $Z_{\text{н}} = -\dot{U}_2 / \dot{I}_2$ — сопротивление нагрузки.

Схема, приведенная на рис. 12.4,а, соответствует инвертору (гиратору) положительного сопротивления. Если же поменять направление только одного из управляемых источников напряжения, то изменится знак у одного из напряжений в уравнениях (12.5) и сопротивление $Z_{\text{вх}} = -Z_r^2 Z_{\text{н}}^{-1}$ примет отрицательное значение. В этом случае схема будет соответствовать инвертору (гиратору) отрицательного сопротивления.

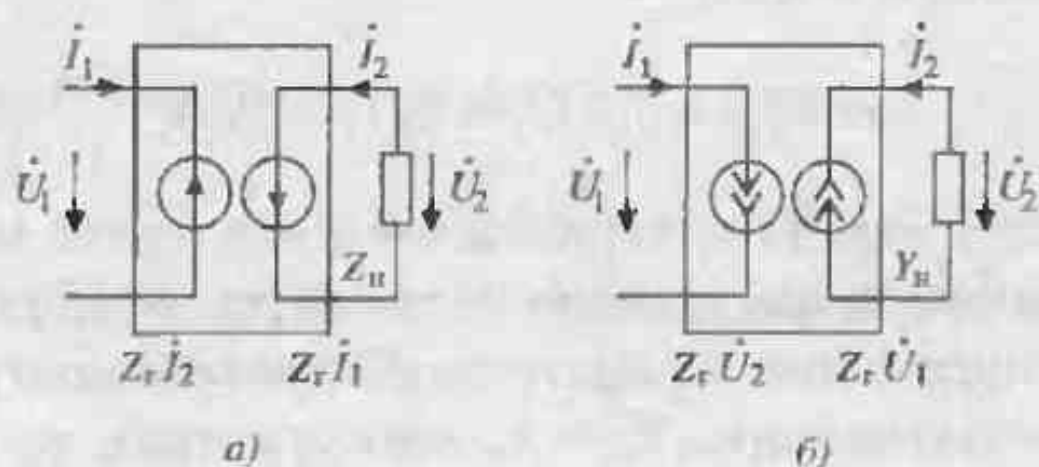


Рис. 12.4. Схемы инверторов сопротивления (а) и проводимости (б)

Аналогичные результаты получаем при использовании двух источников тока, управляемых напряжением. Схема инвертора проводимости с двумя управляемыми источниками тока приведена на рис. 12.4,б. В этой схеме токи управляемых источников имеют значения

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_r \dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 = -Y_r \dot{U}_1, \end{cases} \quad (12.7)$$

где Y_r — проводимость прямой передачи источников, которая и является проводимостью инверсии (гирации).

Из (12.7) находим входную проводимость:

$$Y_{\text{вх}} = \dot{I}_1 / \dot{U}_1 = Y_r^2 Y_n^{-1}, \quad (12.8)$$

где $Y_n = -\dot{I}_2 / \dot{U}_2$ — проводимость нагрузки.

Схема, приведенная на рис. 12.4, б, соответствует инвертору (гиратору) положительной проводимости. Если поменять направление только одного из управляемых источников тока, то изменится знак у одного из токов в уравнениях (12.7) и проводимость $Y_{\text{вх}} = Y_r^2 Y_n^{-1}$ примет отрицательное значение. В этом случае схема рис. 12.4, а будет соответствовать инвертору отрицательной проводимости.

Самым распространенным применением инверторов является создание из них емкостных аналогов индуктивностей. В связи с тем, что изготовление емкости проще, чем изготовление индуктивности, этот способ изготовления индуктивностей находит широкое применение, особенно в микроэлектронике. Так, например, если в схеме рис. 12.4, а использовать емкостную нагрузку $Z_n = (j\omega C_n)^{-1}$, то входное сопротивление инвертора будет индуктивным, а эквивалентная индуктивность будет иметь значение

$$L_{\text{вх}} = R_r^2 C_n, \quad (12.9)$$

где: $R_r = Z_r$ — вещественное сопротивление инверсии.

При помощи инверторов реализуются безындуктивные резонансные контуры, различные безындуктивные фильтры, интеграторы и другие устройства. В таких устройствах отсутствуют многие эффекты, связанные с несовершенством катушек индуктивностей: насыщением ферромагнитных сердечников, потерями на гистерезис и вихревые токи, большими габаритами и массой катушек.

В то же время активные преобразователи сопротивлений и проводимостей имеют и некоторые недостатки. Основным из этих недостатков является их потенциальная неустойчивость. Электрическая цепь называется устойчивой, если в ней отсутствуют неограниченно нарастающие свободные составляющие напряжения или тока реакции.

Так как свободная составляющая реакции представляет собой импульсную характеристику цепи, то при неограниченном нарастании импульсной характе-

риетика с увеличением времени $g(t) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, то цепь будет неустойчивой. Если же импульсная характеристика цепи стремится к нулю при увеличении времени, т. е. $g(t) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, то цепь будет устойчивой. Если устойчивую цепь вывести из состояния равновесия при помощи импульсного возмущения, то она вернется в исходное состояние. Неустойчивая цепь после импульсного возмущения в исходное состояние не вернется.

Для обеспечения затухания импульсной реакции цепи необходимо и достаточно выполнить условие устойчивости, согласно которому все вещественные полюсы и вещественные части комплексных полюсов входного сопротивления должны быть отрицательными, т. е. должны лежать в левой полуплоскости комплексной переменной s . Если хотя бы один полюс окажется в правой полуплоскости, то соответствующее слагаемое импульсной реакции будет неограниченно расти и цепь будет неустойчивой.

Например, конвертор сопротивления будет неустойчивым, если его входное сопротивление имеет отрицательную вещественную часть. Конвертор положительного сопротивления, выполненный по схеме рис. 12.3, а, при $K_{\text{в}} < 1$ имеет входное сопротивление с положительной вещественной частью и, следовательно, всегда устойчив. Конвертор отрицательного сопротивления потенциально неустойчив, так как при $K_{\text{в}} < 1$ входное сопротивление двухполюсника может иметь отрицательную вещественную часть. Если входные зажимы такого конвертора замкнуть накоротко, то он будет устойчивым, так как при напряжении $U_1 = 0$ управляемый источник бездействует. Поэтому конвертор, содержащий источники напряжения, управляемые напряжением, устойчив при коротком замыкании зажимов.

Аналогично, конверторы проводимости, выполненные по схеме (рис. 12.3, б), являются потенциально неустойчивыми при $K_{\text{г}} > 1$. Если входные зажимы такого конвертора разомкнуть, то он будет устойчивым, так как при токе $I_1 = 0$ управляемый источник тока бездействует. Поэтому конверторы, содержащие источник тока, управляемый током, устойчивы при холостом ходе. При нарушении устойчивости конверторов на входных зажимах появляются самопроизвольные скачки или возникают автоколебания.

Все сказанное об устойчивости конверторов в равной мере относится и к устойчивости инверторов. Инверторы положительных сопротивлений и проводимостей потенциально устойчивы. Их неустойчивость может возникать только из-за наличия паразитных неучитываемых параметров управляемых источников. Инверторы отрицательных сопротивлений и проводимостей потенциально неустойчивы. Если вещественная часть входного сопротивления или проводимости принимает отрицательное значение, то в цепи возникают автоколебания или триггерные эффекты.

Пример 12.1. Определить входное сопротивление эмиттерного повторителя на биполярном транзисторе с коэффициентом передачи по току, равным β , и сопротивлением нагрузки $R_{\text{н}}$, выполненным по схеме рис. 12.5, а.

Решение. Используя схему замещения биполярного транзистора (см. рис. 11.7, б), при условии $g_i = 0$ построим схему замещения эмиттерного повторителя, изображенную на рис. 12.5, б.

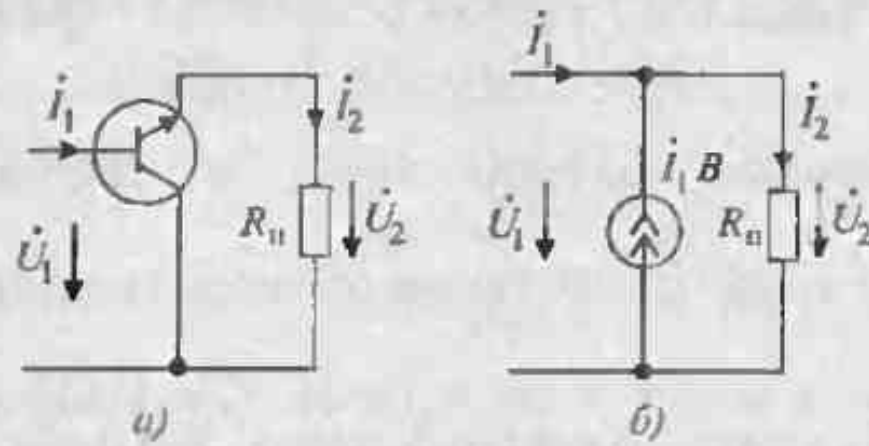


Рис. 12.5. Схема эмиттерного повторителя (а) и схема замещения (б)

Уравнения схемы рис. 12.5, б имеют вид

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_1 + \dot{I}_1 B = \dot{I}_1 (1 + B). \end{cases}$$

Из этих уравнений получаем входное сопротивление эмиттерного повторителя:

$$R_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} (1 + B) = R_n (1 + B).$$

Таким образом, эмиттерный повторитель является конвертором сопротивления с коэффициентом конверсии $\gamma = 1 + B$.

Пример 12.2. Определить входное сопротивление гиратора, имеющего следующие Y -параметры: $Y_{11} = Y_{22} = 0$, $Y_{12} = -Y_{21} = G$ — и нагруженного на емкость C_n . Рассчитать мгновенную мощность, потребляемую таким гиратором.

Решение. Воспользуемся уравнением (12.7) и запишем уравнения гиратора в виде

$$\dot{I}_1 = G\dot{U}_2, \dot{I}_2 = -G\dot{U}_1,$$

или для мгновенных значений

$$i_1(t) = G u_2(t), i_2(t) = -G u_1(t).$$

В соответствии с (12.8) найдем входную проводимость гиратора:

$$Y_{\text{вх}} = \frac{G^2}{j\omega C_n}.$$

Следовательно, входное сопротивление гиратора равно

$$Z_{\text{вх}} = j\omega \frac{C_n}{G^2}$$

и имеет индуктивный характер, а эквивалентная входная индуктивность гириатора $L_{вх} = C_{11}/G^2$. Таким образом, гириатор способен при малых значениях G преобразовать малую емкость C_{11} в большую индуктивность $L_{вх}$.

Мгновенная мощность четырехполюсника может быть рассчитана по формуле

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t).$$

Подставляя мгновенные значения токов и напряжений гириатора, получим

$$p(t) = Gu_2(t) \frac{-i_2(t)}{G} + u_2(t)i_2(t) = 0.$$

Таким образом, гириатор не вносит и не потребляет энергии из цепи, в которую он включен. Следовательно, он эквивалентен пассивному элементу с исключительно малыми потерями.

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Лекция 13. Расчет цепей синусоидального переменного тока по мгновенным значениям

Общая характеристика способов расчета цепей синусоидального переменного тока. Основными способами расчета цепей синусоидального переменного тока можно считать:

- расчет цепей по мгновенным значениям напряжения и тока;
- расчет цепей по комплексным значениям напряжения и тока.

Кроме этих двух способов можно найти в литературе упоминания о расчете цепей различными графическими способами:

- с помощью векторных диаграмм;
- применением топографических диаграмм;
- с помощью круговых диаграмм и др.

Однако погрешность расчета такими способами настолько высока, что практического значения эти способы для расчета цепей не имеют. Их можно использовать только для наглядной иллюстрации двух основных способов расчета.

Порядок расчета цепей по мгновенным значениям. При расчете цепей по мгновенным значениям напряжений и токов обычно пользуются приведением произвольных цепей к некоторым каноническим схемам. В качестве таких канонических схем обычно используют цепи, содержащие последовательное или параллельное соединение элементов.

Две такие канонические схемы приведены на рис. 13.1. В схеме, приведенной на рис. 13.1, а, три элемента: активное сопротивление r , индуктивность L и емкость C соединены последовательно, а в схеме на рис. 13.1, б — параллельно. Условием эквивалентности этих схем считают равенство мгновенных значений напряжения и тока на их зажимах.

Расчет канонических схем. При расчете первой канонической схемы, изображенной на рис. 13.1а, будем считать, что мгновенное значение тока в цепи задано выражением

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi_i), \quad (13.1)$$

а мгновенное значение напряжения на зажимах цепи будем искать в виде:

$$u = U_m \cos(\omega t + \psi_u), \quad (13.2)$$

где: I_m , U_m — амплитуды тока и напряжения, а ψ_i , ψ_u — их начальные фазы. Это напряжение определяется по второму закону Кирхгофа в виде суммы

$$u = u_r + u_L + u_C, \quad (13.3)$$

где $u_r = i_r$ — мгновенное значение напряжения на сопротивлении r ,

$$u_L = L \frac{di}{dt} \text{ — мгновенное значение напряжения на индуктивности } L,$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int idt \text{ — мгновенное значение напряжения на емкости.}$$

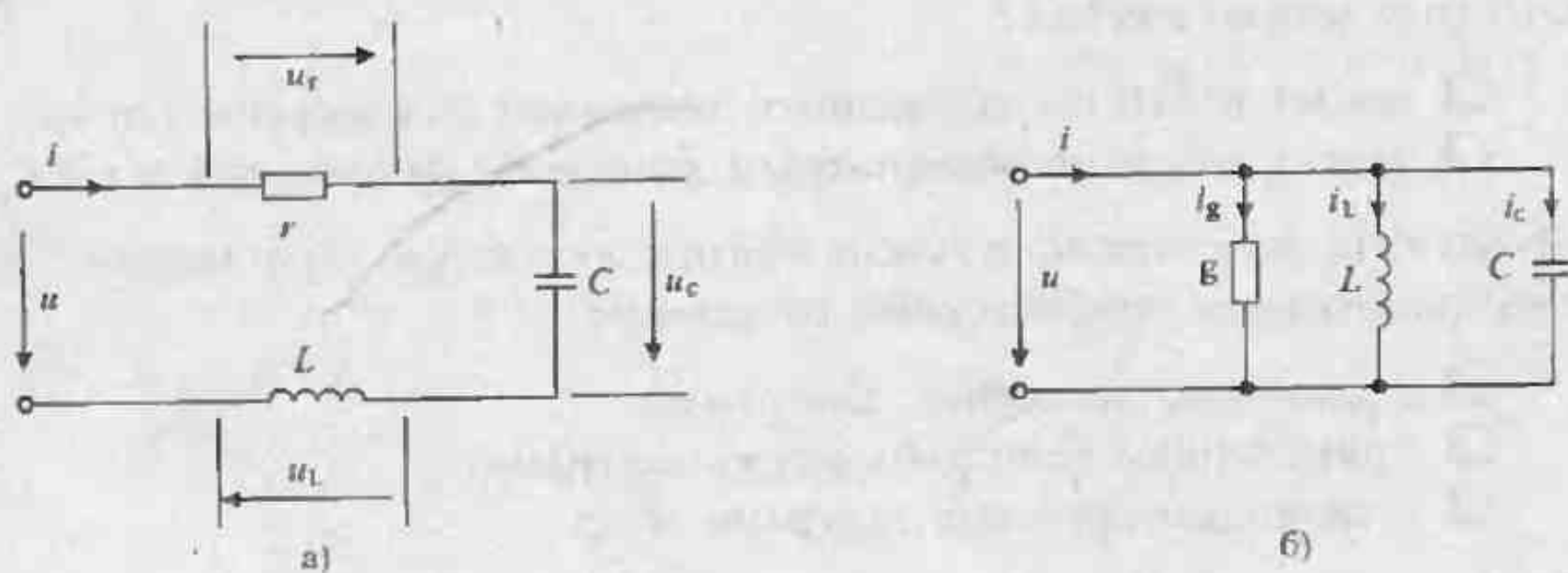


Рис. 13.1 Последовательное (а) и параллельное (б) соединение элементов r , L , C .

Выполняя дифференцирование и интегрирование мгновенного значения тока и подставляя эти значения в уравнение (13.3), получим

$$\begin{aligned} U_m \cos(\omega t + \psi_u) &= I_m r \cos(\omega t + \psi_i) - I_m \omega L \sin(\omega t + \psi_i) + \\ &+ I_m \frac{1}{\omega C} \sin(\omega t + \psi_i) = I_m \left[r \cos(\omega t + \psi_i) - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin(\omega t + \psi_i) \right] = \\ &= I_m \left[r \cos(\omega t + \psi_i) - x \sin(\omega t + \psi_i) \right], \end{aligned} \quad (13.4)$$

где: $x = (\omega L - 1/\omega C)$ — реактивное сопротивление цепи.

Умножим и разделим все члены формулы (13.4) на полное сопротивление цепи $z = \sqrt{r^2 + x^2}$. В результате этого получим уравнение цепи в виде

$$u = I_m z \left[\frac{r}{z} \cos(\omega t + \psi_i) - \frac{x}{z} \sin(\omega t + \psi_i) \right]. \quad (13.5)$$

Обозначим в уравнении цепи (13.5) $r/z = \cos\varphi$, а $x/z = \sin\varphi$. Тогда получим окончательную формулу для напряжения на зажимах цепи в виде, который совпадает с формулой (13.2)

$$u = I_m z \cos(\omega t + \psi_i + \varphi) = U_m \cos(\omega t + \psi_u). \quad (13.6)$$

Из сравнения выражений (13.2) и (13.6) следует, что амплитуда напряжения U_m на зажимах первой канонической схемы определяется по формуле

$$U_m = I_m z, \quad (13.7)$$

а его начальная фаза равна

$$\psi_u = \psi_i + \varphi. \quad (13.8)$$

Аналогичным образом выполняется расчет второй канонической схемы, изображенной на рис. 13.1, б. При расчете этой схемы положим, что напряжение на зажимах цепи, состоящей из параллельно соединенных элементов: проводимости g , индуктивности L и емкости C имеет значение

$$u = U_m \cos(\omega t + \psi_u), \quad (13.9)$$

а ток в цепи будем искать в виде

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi_i). \quad (13.10)$$

В соответствии с первым законом Кирхгофа полный ток в цепи определяется суммой токов в отдельных ее элементах

$$i = i_g + i_L + i_C, \quad (13.11)$$

где: i_g — мгновенное значение тока в активной проводимости g ,

$i_L = \frac{1}{L} \int u dt$ — мгновенное значение тока в индуктивности L ,

$i_C = C \frac{du}{dt}$ — мгновенное значение тока в емкости.

Подставляя значения токов в элементах схемы в уравнение (13.11), получим уравнение

$$\begin{aligned}
 I_m \cos(\omega t + \psi_u) &= U_m g \cos(\omega t + \psi_u) + U_m \frac{1}{\omega L} \sin(\omega t + \psi_u) - \\
 - U_m \omega C \sin(\omega t + \psi_u) &= U_m \left[g \cos(\omega t + \psi_u) + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \sin(\omega t + \psi_u) \right] = (13.12) \\
 &= U_m \left[g \cos(\omega t + \psi_u) + b \sin(\omega t + \psi_u) \right],
 \end{aligned}$$

где: $b = \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)$ — реактивная проводимость цепи.

Умножив и разделив все члены формулы (13.12) на полную проводимость цепи $y = g^2 + b^2 = 1/z$, получим уравнение цепи в виде

$$i = U_m y \cos(\omega t + \psi_u - \varphi). \quad (13.13)$$

Обозначим в уравнении (13.13) $g/y = \cos \varphi$, а $b/y = \sin \varphi$. В результате получим формулу для тока цепи в виде, который соответствует формуле (13.10)

$$i = U_m y \cos(\omega t + \psi_u - \varphi). \quad (13.14)$$

Из сравнения выражений (13.14) и (13.10) следует, что амплитуда тока в цепи второй канонической схемы определяется по формуле

$$I_m = U_m y, \quad (13.15)$$

а его начальная фаза равна

$$\psi_i = \psi_u - \varphi. \quad (13.16)$$

В соответствии с выполненным расчетом, первую каноническую схему (рис. 13.1, а) можно представить в виде последовательного соединения активного сопротивления r и реактивного сопротивления x , как показано на рис. 13.2, а. Аналогично вторую каноническую схему (рис. 13.1, б) можно представить в виде параллельного соединения двух проводимостей: активной проводимости g и реактивной проводимости b , как показано на рис. 13.2, б. При этом следует учитывать, что активные сопротивление r и проводимость g всегда положительны, а реактивное сопротивление x и проводимость b могут быть как положительными, так и отрицательными.

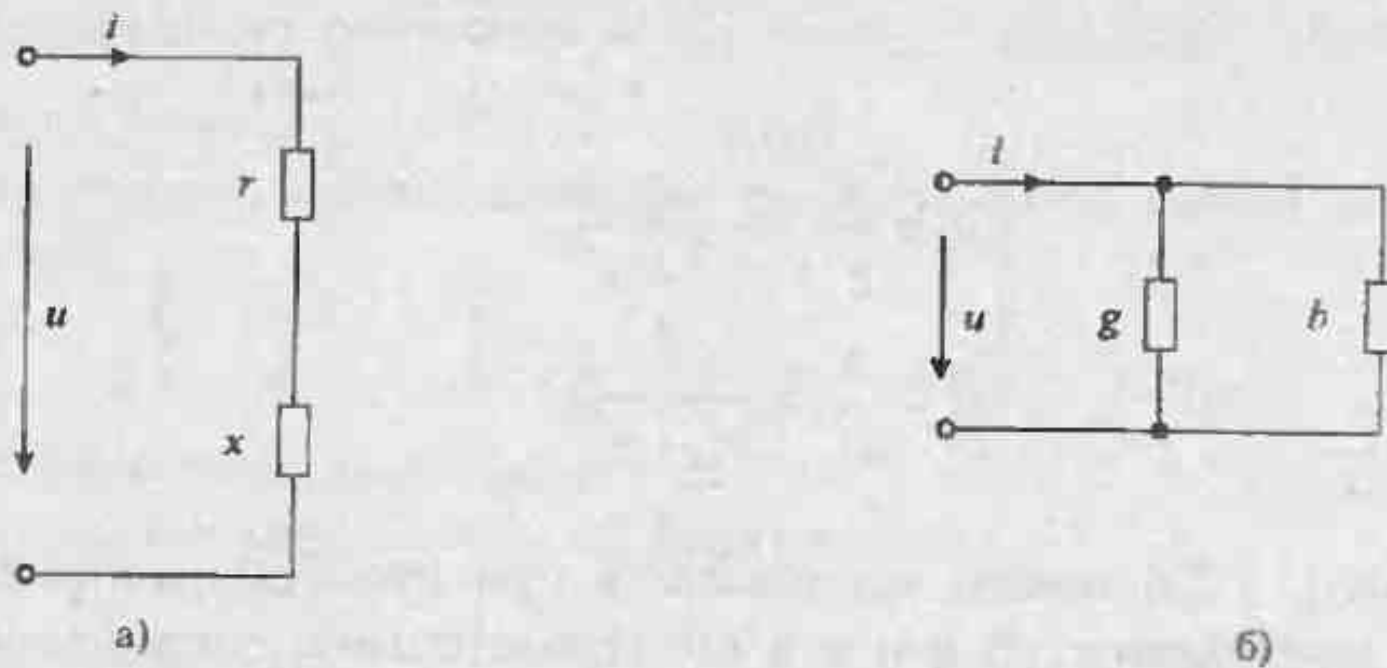


Рис. 13. 2 Последовательная (а) и параллельная (б) канонические схемы

Эквивалентность канонических схем. Определим теперь условия эквивалентности рассмотренных канонических схем. Как указывалось выше, эти схемы можно считать эквивалентными, если мгновенные значения напряжения и тока на их зажимах будут одинаковыми, что возможно при выполнении следующих условий:

□ полное сопротивление первой канонической схемы равно обратному значению полной проводимости второй канонической схемы, т. е. выполняется условие

$$z = 1/y; \quad y = 1/z. \quad (13.17)$$

□ углы сдвига фаз между напряжением и током в обеих схемах также одинаковы, что эквивалентно выполнению условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{r}{z} = \frac{g}{y} \end{array} \right. \quad (13.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{z} = \frac{b}{y} \end{array} \right. \quad (13.19)$$

Из уравнений (13.17), (13.18), (13.19) следует, что обе канонические схемы эквивалентны, если выполняются условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \frac{g}{y^2} = \frac{g}{g^2 + b^2}, \\ x = \frac{b}{y^2} = \frac{b}{g^2 + b^2}. \end{array} \right. \quad (13.20)$$

ИЛИ

$$\begin{cases} g = \frac{r}{z^2} = \frac{r}{r^2 + x^2}, \\ b = \frac{x}{z^2} = \frac{x}{r^2 + x^2}. \end{cases} \quad (13.21)$$

Формулы (13.20) можно использовать при преобразовании параллельного соединения проводимостей g и b в последовательное соединение сопротивлений r и x . Аналогично, формулы (13.21) можно использовать при замене последовательного соединения r и x параллельным соединением g и b .

Используя рассмотренные преобразования, можно свести неканоническую цепь к одной из канонических и использовать расчетные соотношения, приведенные выше.

Пример 13.1. Требуется определить ток в цепи, изображенной на рис. 13.3, а при условии, что на входе действует гармоническое напряжение $u(t) = 10\cos(100t + 30^\circ)$, В, и параметры элементов схемы имеют значения:

$$x_L = 20 \text{ Ом}, \quad b_C = g = 0,05 \text{ См}.$$

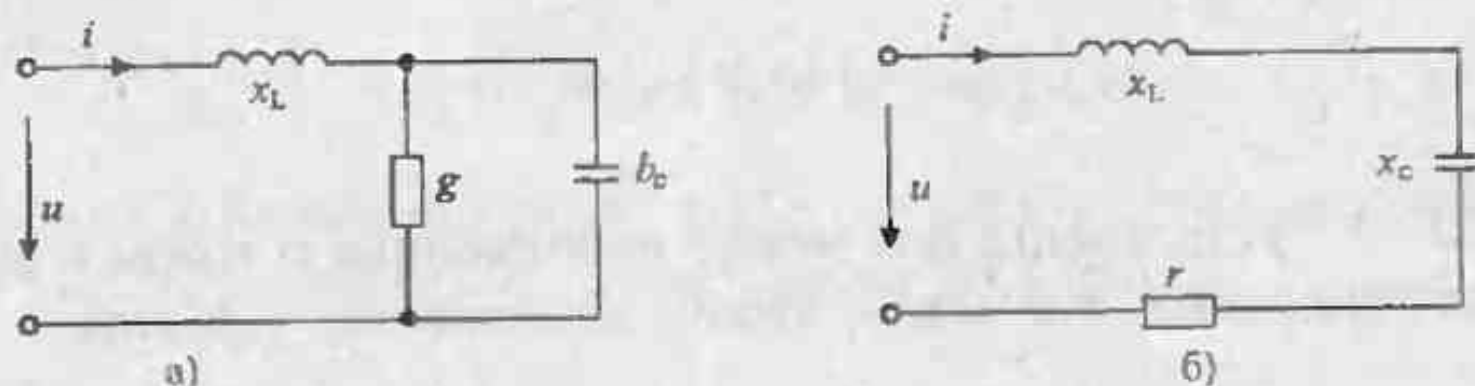


Рис. 13.3. Исходная (а) и преобразованная (б) схемы цепи

Решение. Используя формулы (13.20), заменим параллельное соединение g и b_C последовательным соединением r и x_C

$$r = \frac{g}{g^2 + b_C^2} = \frac{0,05}{0,05^2 + 0,05^2} = 10 \text{ Ом},$$

$$x_C = \frac{b_C}{g^2 + b_C^2} = 10 \text{ Ом}.$$

Преобразованная схема имеет вид, показанный на рис. 13.3, б. После объединения реактивных сопротивлений x_L и x_C получим схему, изображенную на рис. 13.3, в, у

которой реактивное сопротивление $x = x_L - x_C = 20 - 10 = 10$ Ом, а полное сопротивление $z = \sqrt{r^2 + x^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14$ Ом.

При этих сопротивлениях сдвиг фаз между током i в цепи и напряжением u имеет значение:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{r} = \frac{10}{10} = 1,$$

что соответствует углу сдвига фаз $\varphi = 45^\circ$.

Амплитуда тока определяется по формуле (13.7)

$$I_m = U_m / z = 10 / 14 = 0,7 \text{ А.}$$

Таким образом, мгновенное значение тока в схеме, изображенной на рис. 13.1, а имеет значение:

$$i = 0,7 \cos(100t + 30^\circ + 45^\circ) = 0,7 \cos(100t + 75^\circ) \text{ А.}$$

Лекция 14. Расчет цепей синусоидального переменного тока по комплексным значениям

Основные положения способа расчета по комплексным значениям. Способ расчета линейных электрических цепей по комплексным значениям был предложен американским инженером Ч. П. Штейнметцем в 1893 г. В отличие от рассмотренного в лекции 13 расчета цепей при гармоническом токе по мгновенным значениям, в этом способе не используется описанное в лекции 3 представление гармонических воздействий с помощью комплексных чисел.

Как указывалось в лекции 3, представление гармонических воздействий в комплексном виде позволяет заменить решение трансцендентных уравнений с гармоническими функциями решением алгебраических уравнений с комплексными переменными. Такая возможность основана на представлении мгновенного значения гармонического колебания $x(t) = X_m \cos(\omega t + \psi_x)$ в виде суммы двух квадратурных колебаний:

$$\dot{x}(t) = X_m \cos(\omega t + \psi_x) + jX_m \sin(\omega t + \psi_x) = \dot{X}_m e^{j\omega t}, \quad (14.1)$$

где: $\dot{X}_m = X_m e^{j\psi_x}$ — комплексная амплитуда гармонического колебания,

$\dot{x}(t) = \dot{X}_m e^{j\omega t}$ — комплексное мгновенное значение колебания.

Вещественная часть выражения (14.1) соответствует косинусному колебанию

$$\operatorname{Re} \dot{x}(t) = X_m \cos(\omega t + \psi_x) = x(t), \quad (14.2)$$

а мнимая часть определяет квадратурное (т. е. синусное) колебание

$$\operatorname{Im} \dot{x}(t) = X_m \sin(\omega t + \psi_x). \quad (14.3)$$

Алгебраизация интегродифференциальных уравнений электрической цепи при использовании комплексных колебаний основана на том, что дифференцирование комплексного колебания $\dot{x}(t)$ приводит к умножению его комплексной амплитуды \dot{X}_m на оператор поворота $j\omega$, так как

$$\frac{d\dot{x}(t)}{dt} = \frac{d(\dot{X}_m e^{j\omega t})}{dt} = j\omega \dot{X}_m e^{j\omega t}, \quad (14.4)$$

а интегрирование комплексного колебания $\dot{x}(t)$ приводит к делению его комплексной амплитуды \dot{X}_m на $j\omega$, так как

$$\int \dot{x}(t) dt = \int \dot{X}_m e^{j\omega t} dt = \frac{\dot{X}_m}{j\omega} e^{j\omega t}. \quad (14.5)$$

Способ расчета цепей с использованием комплексных амплитуд в литературе часто называют *символическим методом*. Упрощение расчета цепей этим способом основано на том, что интегродифференциальные уравнения цепи сводятся к алгебраическим для комплексных амплитуд, а общий сомножитель $e^{j\omega t}$ при этом сокращается. Определение мгновенного значения колебания по его комплексной амплитуде выполняют по формулам (14.2) или (14.3).

Реакция линейных цепей на гармонические воздействия. Установившаяся (вынужденная) реакция цепи $\dot{y}(t)$ на гармоническое воздействие $\dot{x}(t)$, заданное в комплексной форме (14.1), в соответствии со схемой, приведенной на рис. 14.1, определяется по формуле

$$\dot{y}(t) = H(j\omega)\dot{x}(t) = H(j\omega)\dot{X}_m e^{j\omega t}, \quad (14.6)$$

где: $H(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = |H(j\omega)|e^{j\psi_H}$ — комплексная передаточная (схемная) функция цепи,

$U(\omega)$ и $V(\omega)$ — вещественная и мнимая части комплексной передаточной функции цепи,

$\psi_H = \operatorname{arctg}[V(\omega)/U(\omega)]$ — аргумент передаточной функции, который определяет сдвиг фазы реакции $\dot{y}(t)$.

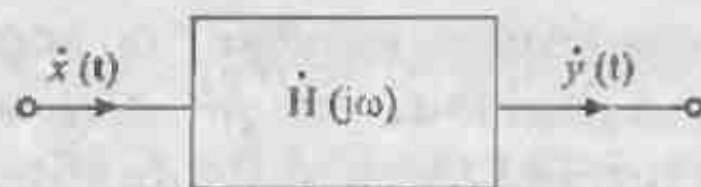


Рис. 14. 1. Преобразование комплексного сигнала линейной электрической цепью

Воспользуемся формулой (14.6) для определения реакции цепи на гармоническое воздействие

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \psi_x) = \frac{\dot{X}_m}{2} e^{j\omega t} + \frac{\dot{X}_m}{2} e^{-j\omega t} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2, \quad (14.7)$$

где: $\dot{X}_m = X_m e^{j\psi_x}$ — комплексная амплитуда воздействия,

$X_m = X_m e^{-j\psi_x}$ — сопряженная комплексная амплитуда воздействия.

В соответствии с принципом наложения, реакция цепи на сумму двух воздействий \dot{x}_1 и \dot{x}_2 может быть найдена по формуле

$$y = \dot{y}_1 + \dot{y}_2. \quad (14.8)$$

Составляющие реакции можно представить в виде:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = H(j\omega)\dot{x}_1 = H(j\omega)\frac{\dot{X}_m}{2} e^{j\omega t} = |H(j\omega)|\frac{X_m}{2} e^{j\psi_x} e^{j\psi_H} e^{j\omega t}, \\ \dot{y}_2 = H(-j\omega)\dot{x}_2 = H(-j\omega)\frac{\dot{X}_m}{2} e^{-j\omega t} = |H(j\omega)|\frac{X_m}{2} e^{-j\psi_x} e^{-j\psi_H} e^{-j\omega t}, \end{cases} \quad (14.9)$$

где: $H(-j\omega) = U(\omega) - jV(\omega) = |H(j\omega)|e^{-j\psi_H}$ — сопряженная комплексная передаточная функция цепи.

Подставляя значения (14.9) в формулу (14.8), получим мгновенное значение реакции цепи

$$\begin{aligned} y = \dot{y}_1 + \dot{y}_2 &= \frac{X_m}{2} |H(j\omega)| e^{j(\omega t + \psi_x + \psi_H)} + e^{-j(\omega t + \psi_x + \psi_H)} = \\ &= Y_m \cos(\omega t + \psi_x + \psi_H). \end{aligned} \quad (14.10)$$

где: $Y_m = X_m |H(j\omega)|$ — амплитуда реакции (выходного сигнала),
 $(\psi_x + \psi_H)$ — ее начальная фаза.

Таким образом, установившаяся реакция на гармоническое воздействие также представляет собой гармоническую функцию той же частоты, амплитуда которой Y_m пропорциональна амплитуде входного воздействия X_m и модулю передаточной функции цепи $|H(j\omega)|$, а сдвиг фаз ψ_H определяется аргументом этой функции.

Реакцию линейной цепи можно также охарактеризовать одной величиной — комплексной амплитудой

$$\dot{Y}_m = H(j\omega)\dot{X}_m = |H(j\omega)| X_m e^{j(\psi_r + \psi_H)}, \quad (14.11)$$

откуда находим мгновенное значение реакции

$$y = \text{Re}(Y_m e^{j\omega t}). \quad (14.12)$$

Закон Ома в комплексной форме. Практическое применение способа расчета цепей по комплексным значениям напряжения и тока основывается на уравнениях Ома и Кирхгофа. Уравнение Ома в комплексной форме можно рассматривать как для схемы с последовательным соединением элементов r, L, C (рис. 13.1, а), так и для схемы с параллельным соединением элементов g, L, C (рис. 13.1, б). Для схемы с последовательным соединением элементов уравнение цепи для мгновенных значений имеет вид:

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (14.13)$$

Если гармоническое напряжение задано вещественной частью комплексного напряжения $\dot{i} = \dot{U}_m e^{j\omega t}$, то дифференциальное уравнение (14.13) записывается в виде

$$\text{Re}(\dot{U}_m e^{j\omega t}) = r \text{Re}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) + L \frac{d}{dt} \text{Re}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) + \frac{1}{C} \int \text{Re}(\dot{I}_m e^{j\omega t}). \quad (14.14)$$

Сокращая в обеих частях выражения (14.14) сомножитель оператора вращения $e^{j\omega t}$ и приравнявая комплексные выражения, получим

$$\dot{U}_m = r\dot{I}_m + j\omega L\dot{I}_m + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_m. \quad (14.15)$$

Если в уравнении (14.15) вынести общий множитель \dot{I}_m за скобку, то в полученном выражении образуется передаточная (схемная) функция цепи, равная комплексному сопротивлению

$$Z = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = r + jx, \quad (14.16)$$

где реактивное сопротивление $x = \omega L - 1/(\omega C)$.

В результате уравнение (14.15) можно записать в виде

$$\dot{U}_m = Z\dot{I}_m, \quad (14.17)$$

которое представляет закон Ома в комплексной форме для последовательной цепи.

Аналогично можно получить выражение закона Ома для параллельного соединения элементов g , L , C

$$\dot{I}_m = Y\dot{U}_m, \quad (14.18)$$

где: $Y = g - jb$ — комплексная проводимость цепи,

$b = b_L - b_C = 1/(\omega L) - \omega C$ — реактивная проводимость.

Если положить, что обе схемы эквивалентны, то, приравнявая $Z = 1/Y$, получим уравнение $r + jx = 1/(g - jb)$, откуда находим условия эквивалентности схем

$$r = \frac{g}{g^2 + b^2}, \quad x = \frac{b}{g^2 + b^2}, \quad g = \frac{r}{r^2 + x^2}, \quad b = \frac{x}{r^2 + x^2},$$

которые были получены ранее при расчете цепи по мгновенным значениям в лекции 13.

Законы Кирхгофа в комплексной форме. Законы Кирхгофа в комплексной форме можно получить, если использовать уравнения (2.6), (2.7) для мгновенных значений

$$\begin{aligned} \sum_k \dot{i}_k &= \sum_k \operatorname{Re}(\dot{I}_{mk} e^{j\omega t}) = 0, \\ \sum_k u_k &= \sum_k \operatorname{Re}(\dot{U}_{mk} e^{j\omega t}) = 0. \end{aligned} \quad (14.19)$$

Приравняв нулю комплексные выражения в уравнениях (14.19), получим

$$\sum_k \dot{I}_{mk} = 0, \quad \sum_k \dot{U}_{mk} = 0, \quad (14.20)$$

которые и являются уравнениями Кирхгофа в комплексной форме.

Коэффициентами пропорциональности между напряжениями и токами отдельных пассивных элементов являются их комплексные сопротивления и проводимости Z_k и Y_k

$$\dot{U}_{mk} = Z_k \dot{I}_{mk} \quad \text{и} \quad \dot{I}_{mk} = Y_k \dot{U}_{mk}. \quad (14.21)$$

Порядок расчета цепей по комплексным значениям. Из выполненного рассмотрения следует, что законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме записываются так же, как для цепей постоянного тока. Отсюда следует, что для расчета линейных цепей синусоидального тока в комплексной форме можно пользоваться теми же методами расчета, которые используются при расчете цепей постоянного тока. Расчет сложных электрических цепей в комплексной форме можно выполнять с применением специальных методов, которые подробно рассмотрены в разделе 6. Ниже приводятся только некоторые примеры расчета, основанные на применении законов Ома и Кирхгофа.

Пример 14.1. Составить уравнения Кирхгофа для цепи, приведенной на рис. 14.2. Записать комплексные значения напряжений и токов в ветвях.

Решение. В схеме, изображенной на рис. 14.2, имеется 4 узла, для которых можно записать три независимых уравнения по первому закону Кирхгофа. Выберем для

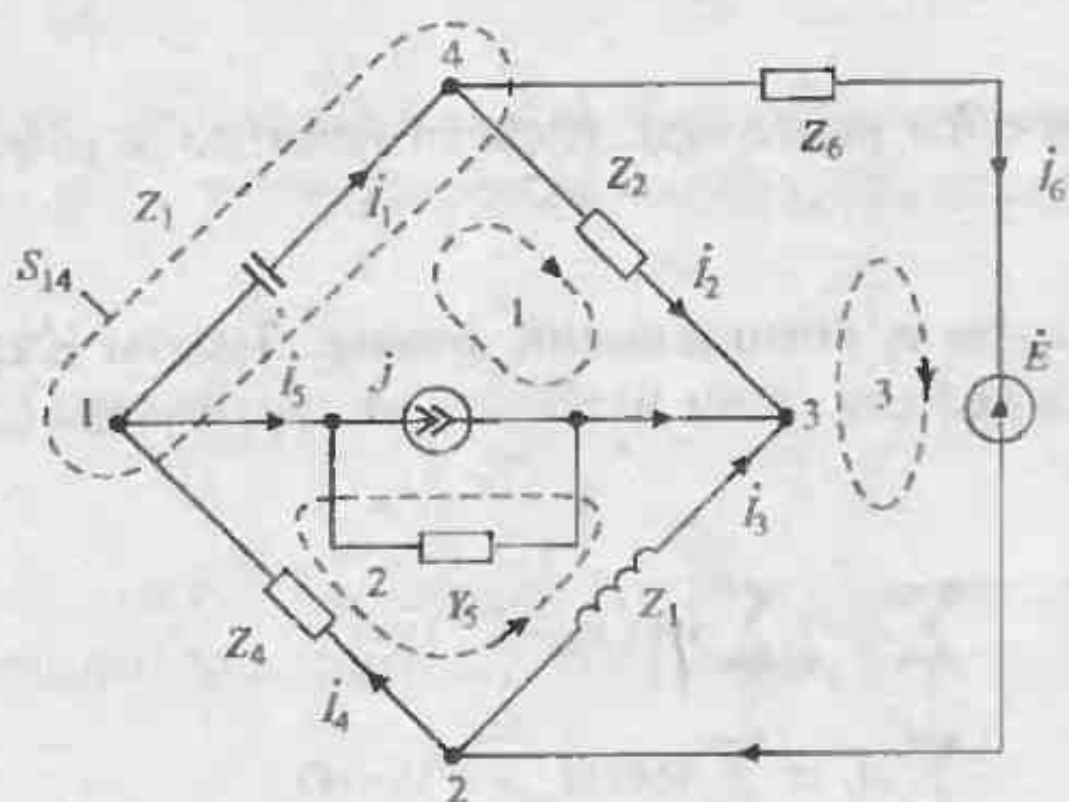


Рис. 14.2. Пример цепи для расчета по комплексным значениям

составления этих уравнений узлы 2, 3 и сечение $S_{1,4}$. Для выбранных узлов и сечения можно записать уравнения в комплексной форме:

$$1) \text{ уравнение для узла 2 } \dot{I}_3 + \dot{I}_4 - \dot{I}_6 = 0,$$

$$2) \text{ уравнение для узла 3 } -\dot{I}_2 - \dot{I}_3 - \dot{I}_5 = 0,$$

$$3) \text{ уравнение для сечения } S_{1,4} = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_6 - \dot{I}_4 = 0.$$

По второму закону Кирхгофа можно также составить три независимых уравнения в комплексной форме для контуров 1, 2, 3:

$$1) \text{ уравнение для контура 1 } \dot{U}_1 + \dot{U}_2 - \dot{U}_5 = 0,$$

$$2) \text{ уравнение для контура 2 } \dot{U}_3 - \dot{U}_5 - \dot{U}_4 = 0,$$

$$3) \text{ уравнение для контура 3 } \dot{U}_6 + \dot{U}_3 - \dot{U}_2 = 0.$$

Напряжения и токи в ветвях цепи связаны уравнениями, составленными по закону Ома:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1 = \dot{I}_1 / (j\omega C),$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_2 = \dot{I}_2 r_2,$$

$$\dot{U}_3 = \dot{I}_3 Z_3 = \dot{I}_3 j\omega L,$$

$$\dot{U}_4 = \dot{I}_4 Z_4 = \dot{I}_4 r_4,$$

$$\dot{U}_5 = (\dot{I}_5 - \dot{J}) / Y_5 = (\dot{I}_5 - \dot{J}) / g_5,$$

$$\dot{U}_6 = \dot{E} + \dot{I}_6 Z_6 = \dot{E} + \dot{I}_6 r_6.$$

Примечания.

1) При составлении уравнений по первому закону Кирхгофа принято, что токи, вытекающие из узлов или сечений, положительны, а токи, втекающие в узлы или сечения — отрицательны.

2) При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа принято, что напряжения на ветвях положительные, если направление контура совпадает с направлением тока ветви. Если направление контура противоположно направлению тока ветви, то напряжение на ветви отрицательное.

Пример 14.2. Определить мгновенные значения токов в ветвях для схемы, приведенной на рис. 14.3, а. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $L = 1 \text{ мГн}$; $C = 100 \text{ мкФ}$; $r = 5 \text{ Ом}$; $u_1 = 100 \sin 5000t, \text{ В}$; $u_2 = 100 \cos 5000t, \text{ В}$.

Решение. Определим индуктивное и емкостное сопротивления цепи:

$$x_L = \omega L = 5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ Ом},$$

$$x_C = 1/(\omega C) = 1/(5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4}) = 10/5 = 2 \text{ Ом}.$$

Комплексные сопротивления цепи имеют значения:

$$Z_L = j5 \text{ Ом}, Z_C = -j2 \text{ Ом}.$$

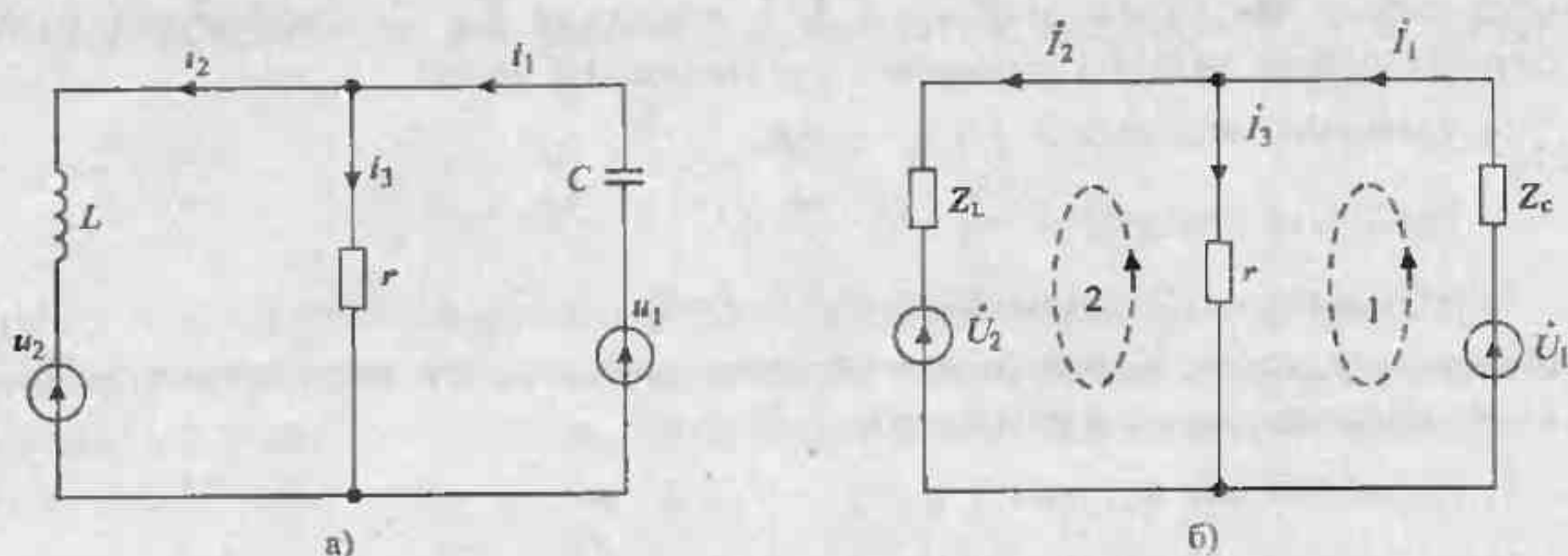


Рис. 14.3. Основная (а) и расчетная (б) схема цепи.

Найдем комплексные значения напряжений источников:

$$\dot{U}_1 = 100 \text{ В}; \quad \dot{U}_2 = 100 e^{j90} = 100j \text{ В.}$$

Выберем направления токов в ветвях и составим уравнения Кирхгофа для контуров 1, 2, используя обозначения схемы, приведенной на рис. 14.3, б:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 Z_C + \dot{I}_3 r = \dot{U}_1, \\ \dot{I}_2 Z_L - \dot{I}_3 r = -\dot{U}_2, \\ \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = \dot{I}_3. \end{cases}$$

После подстановки значения тока \dot{I}_3 , получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 (Z_C + r) - \dot{I}_2 r = \dot{U}_1, \\ -\dot{I}_2 r + \dot{I}_2 (Z_L + r) = -\dot{U}_2. \end{cases}$$

После подстановки значений сопротивлений и комплексных напряжений запишем систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{I}_1 (5 - j2) - \dot{I}_2 5 = 100, \\ -\dot{I}_1 5 + \dot{I}_2 (5 + j5) = -100j. \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений можно выполнить с помощью определителей

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

где:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (5-j2) & -5 \\ -5 & (5+j5) \end{vmatrix} = (5-j2)(5+j5) - 25 = 10 + j15 = 18 e^{j56^\circ}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 100 & -5 \\ -100j & (5+j5) \end{vmatrix} = 500.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (5-j2) & 100 \\ -5 & -100j \end{vmatrix} = 300 - j500 = 580 e^{-j59^\circ}.$$

Подставляя значения определителей, найдем комплексные токи в ветвях схемы

$$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{500}{18 e^{j56^\circ}} = 27,8 e^{-j56^\circ},$$

$$i_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{580 e^{-j59^\circ}}{18 e^{j56^\circ}} = 32 e^{-j115^\circ}.$$

$$i_3 = i_1 - i_2 = 27,8 e^{-j56^\circ} - 32 e^{-j115^\circ} = 30 e^{j12^\circ}.$$

Используя комплексные значения токов ветвей, запишем их мгновенные значения

$$i_1 = 27,8 \cos(5000t - 56^\circ) \text{ В},$$

$$i_2 = 32 \cos(5000t - 115^\circ) \text{ В},$$

$$i_3 = 30 \cos(5000t + 12^\circ) \text{ В}.$$

Векторная диаграмма токов в цепи, на комплексной плоскости приведена на рис. 14.4.

Определение передаточных (схемных) функций цепи в стационарном режиме. Реакция $y(t)$ и воздействие $x(t)$ в стационарном режиме связаны между собой с помощью передаточной (схемной) функции. В установившемся режиме передаточную функцию обычно определяют при гармоническом входном сигнале, заданном в комплексной форме. Комплексную схемную функцию цепи в этом случае можно определить как отношение реакции к воздействию, т. е.

$$H(j\omega) = \dot{y} / \dot{x} = \dot{Y}_m / \dot{X}_m \text{ при } \dot{x} = \dot{X}_m e^{j\omega t}. \quad (14.22)$$

Схемные функции могут быть различными величинами в зависимости от того, что принято за входное воздействие, а что — за выходную реакцию. Если воздействие и реакция соответствуют напряжению и току во входной ветви (рис. 14.5, а), то схемная функция представляет собой входное сопротивление

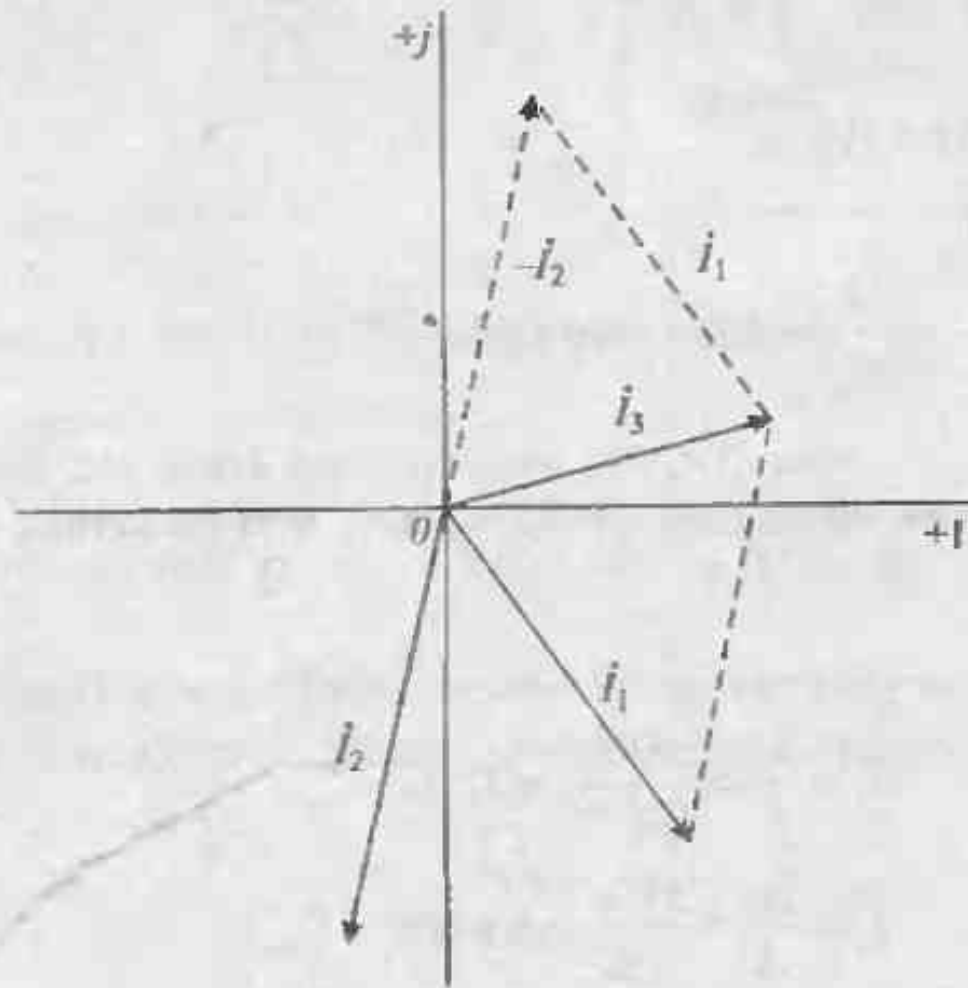


Рис. 14.4. Векторная диаграмма токов в цепи



Рис. 14.5. Определение входных функций (а) и передаточных функций (б) пассивной цепи

или входную проводимость и называется *входной функцией цепи*. Такая функция может быть *обобщенным входным сопротивлением*

$$Z_{вх} = \dot{U}_{вх} e^{j\omega t} / (\dot{I}_{вх} e^{j\omega t}) = \dot{U}_{вх} / \dot{I}_{вх} \quad (14.22)$$

или обобщенной входной проводимостью

$$Y_{вх} = 1/Z_{вх} = \dot{I}_{вх} / \dot{U}_{вх} \quad (14.23)$$

Если же реакция цепи представляет собой ток или напряжение в выходной ветви цепи, а воздействие — ток или напряжение входного сигнала, то схемная функция цепи может быть передаточной функцией цепи по току (рис. 14.5, б)

$$K_i(j\omega) = \frac{\dot{I}_{вых} e^{j\omega t}}{\dot{I}_{вх} e^{j\omega t}} = \frac{\dot{I}_{вых}}{\dot{I}_{вх}} \quad (14.24)$$

или по напряжению

$$K_u(j\omega) = \frac{\dot{U}_{вых} e^{j\omega t}}{\dot{U}_{вх} e^{j\omega t}} = \frac{\dot{U}_{вых}}{\dot{U}_{вх}} \quad (14.25)$$

обобщенным сопротивлением передачи

$$Z_n = \dot{U}_{вых} / \dot{I}_{вх} \quad (14.26)$$

или обобщенной проводимостью передачи

$$Y_n = \dot{I}_{вых} / \dot{U}_{вх} \quad (14.27)$$

Комплексная схемная функция цепи может быть представлена в алгебраической или показательной формах:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega) + a_0} = U(\omega) + jV(\omega) = \\ &= |H(j\omega)| e^{j\psi_H(\omega)}, \end{aligned} \quad (14.28)$$

где $U(\omega) = \text{Re}[H(j\omega)]$, $V(\omega) = \text{Im}[H(j\omega)]$ — соответственно вещественная и мнимая части комплексной передаточной функции цепи.

Модуль $H(j\omega)$ и аргумент $\psi_H(\omega)$ характеризуют соответственно амплитудно-частотную (АЧХ) и фазочастотную (ФЧХ) характеристики цепи. Они могут изображаться графически в виде частотных характеристик цепи.

Кроме этого, комплексная передаточная функция цепи может быть представлена на комплексной плоскости в виде траектории движения конца вектора $H(j\omega)$. Такой график называют амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ) цепи.

Каждая точка такой характеристики на комплексной плоскости, соответствующая определенной частоте ω , даст значения модуля и фазы схемной функции. Эти частотные зависимости позволяют судить о характере преобразования входного сигнала электрической цепью при различных частотах.

Если $H(j\omega)$ является входной функцией цепи $Z_{вх}(j\omega)$ или $Y_{вх}(j\omega)$, то ее вещественная $U(\omega)$ и мнимая $V(\omega)$ части представляют собой соответственно активное $r_{вх}(\omega)$ и реактивное $x_{вх}(\omega)$ входные сопротивления или активную $g_{вх}(\omega)$ и реактивную $b_{вх}(\omega)$ входные проводимости. При этом комплексное входное сопротивление цепи равно

$$Z_{вх} = r(\omega) + jx(\omega) = z_{вх}(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (14.29)$$

а комплексная входная проводимость цепи равна

$$Y_{вх} = 1/Z_{вх} = g(\omega) - jb(\omega) = y_{вх}(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (14.30)$$

где $z_{вх}(\omega) = \sqrt{r^2(\omega) + x^2(\omega)}$ и $y_{вх}(\omega) = \sqrt{g^2(\omega) + b^2(\omega)}$ — амплитудно-частотные характеристики входных функций.

$\varphi(\omega) = \text{arctg}[x(\omega)/r(\omega)]$ или $\varphi(\omega) = \text{arctg}[-b(\omega)/g(\omega)]$ — фазо-частотные характеристики входных функций.

Модуль и вещественная часть входной функции цепи являются четными функциями частоты, а фаза $\varphi(\omega)$ и мнимая часть — нечетными функциями частоты ω . АФХ пассивных цепей всегда расположена справа от мнимой оси комплексной плоскости, так как цепь всегда потребляет некоторую энергию от источника сигнала и, следовательно, $\text{Re}[Z_{вх}(j\omega)] = r(\omega) > 0$ или $\text{Re}[Y_{вх}(j\omega)] = g(\omega) > 0$.

Пример 14.3. Требуется определить частотные характеристики функции передачи последовательного rLC контура, изображенного на рис. 14.6, а, по напряжению u_C на емкости и напряжению u , на сопротивлении:

$$K_{u_C}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{u_C}(j\omega)}{\dot{U}_{вх}(j\omega)} = \frac{\dot{U}_{u_C}}{E_m},$$

$$K_{u_r}(j\omega) = \frac{r\dot{I}_m(j\omega)}{\dot{U}_{вх}(j\omega)} = \frac{r\dot{I}_{mC}}{E_m}.$$

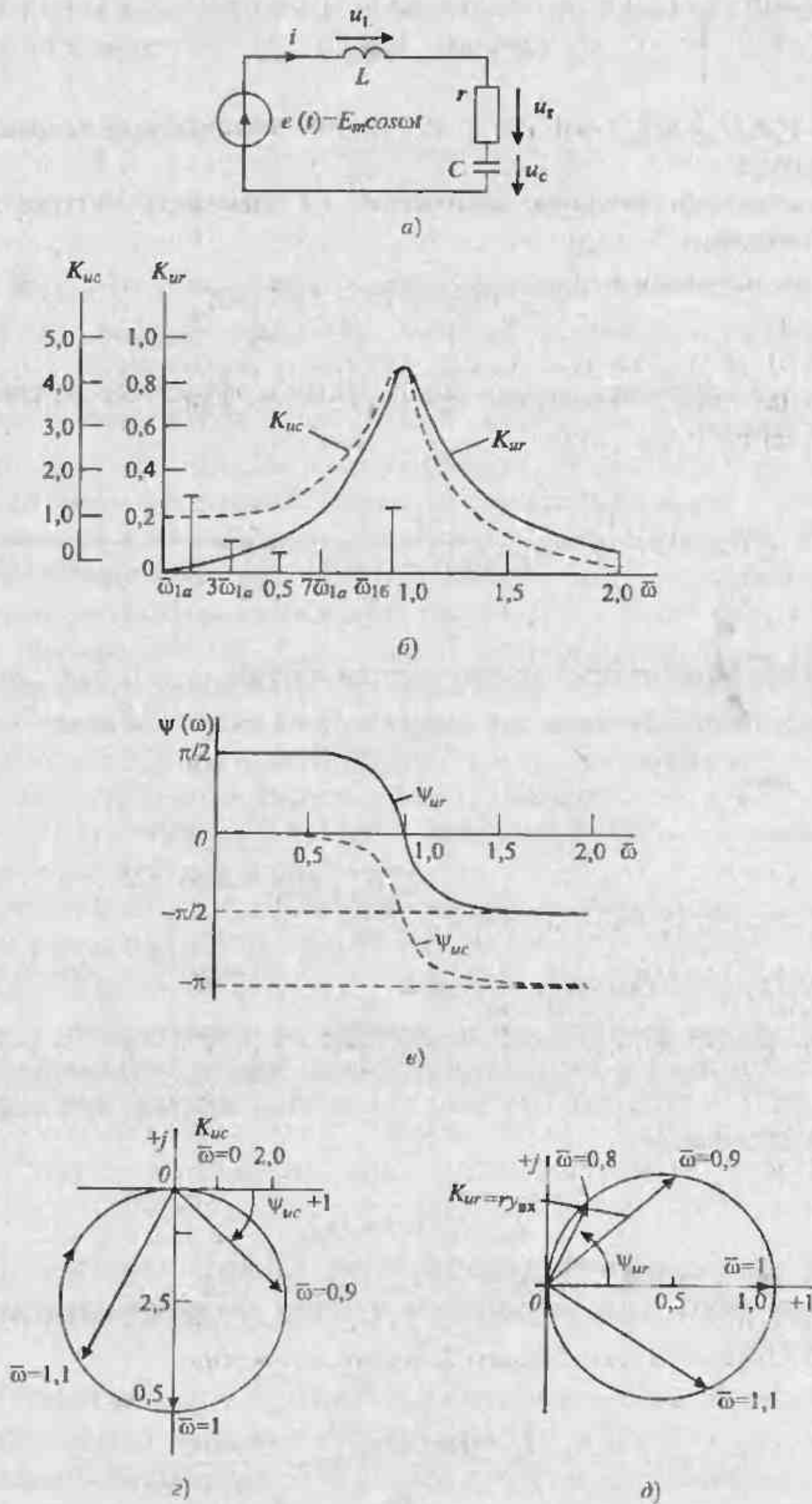


Рис. 14.6. Схема последовательного контура (a), его частотные (б) и фазовые (в) характеристики, векторные диаграммы и фазочастотные характеристики (г, д)

Решение. Запишем уравнение Кирхгофа в комплексной форме

$$\dot{U}_{mr} + \dot{U}_{mC} + \dot{U}_{mL} = \dot{E}_m,$$

где $\dot{U}_{mr} = \dot{I}_m r$, $\dot{U}_{mC} = \dot{I}_m / j\omega C$, $\dot{U}_{mL} = \dot{I}_m j\omega L$ — комплексные напряжения на элементах контура.

После подстановки значений напряжений на элементах контура в уравнение Кирхгофа получим

$$\dot{U}_{mC} [1 + (j\omega)^2 LC + j\omega Cr] = \dot{E}_m.$$

Используя это выражение, найдем комплексный коэффициент передачи по напряжению на емкости

$$\dot{K}_{uC}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{mC}}{\dot{E}_m} = \frac{1}{LC(j\omega)^2 + rCj\omega + 1} = \frac{1}{LC} \frac{1}{(j\omega)^2 + j\omega r/L + 1/LC}.$$

Используя обозначение резонансной частоты контура $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, получим уравнение передаточной функции для напряжения на емкости в виде:

$$\begin{aligned} \dot{K}_{uC} &= \frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2 + j\omega r/L + \omega_0^2} = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + j\omega Cr} = \\ &= \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + j\omega/(\omega_0 Q)} = |\dot{K}_{uC}(j\omega)| e^{j\varphi_{uC}(\omega)}. \end{aligned}$$

где: $Q = \omega_0 L / r$ — добротность контура.

Передаточную функцию для напряжения на сопротивлении r можно найти, если учесть, что ток в емкости пропорционален производной напряжения на емкости, т. е., что $i_C = C(du_C/dt)$. При этом комплексное значение тока в контуре определяется выражением:

$$\dot{I}_m = \dot{I}_{mC} = j\omega C \dot{U}_{mC}.$$

В результате комплексная передаточная функция для напряжения на сопротивлении имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{K}_{ur}(j\omega) &= \frac{\dot{U}_{mr}}{\dot{E}_m} = \frac{r\dot{I}_m}{\dot{E}_m} = \frac{j\omega r C \dot{U}_{mC}}{\dot{E}_m} = \frac{j\omega r C}{CL(j\omega)^2 + j\omega r C + 1} = \\ &= \frac{r}{r + j\omega L + 1/(j\omega C)}. \end{aligned}$$

Используя значения резонансной частоты контура ω_0 и его добротности Q , введенные выше, запишем комплексную передаточную функцию для напряжения на сопротивлении в виде:

$$K_{ur} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}} e^{-j\varphi_{ur}(\omega)},$$

где $\varphi_{ur} = \arctg [Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)]$ — сдвиг фазы между напряжением и током в цепи. Полученные выражения показывают, что вид частотных характеристик контура зависит от его добротности $Q = \omega_0/r$ и резонансной частоты ω_0 .

Задаваясь значениями относительной частоты $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$, можно рассчитать частотные характеристики, которые изображены на рис. 14.6, б и 14.6, в.

АЧХ имеют явно выраженный максимум, свидетельствующий о резонансном характере явления в rLC контуре. Напряжение $U_{mC} = U_{mL}$ в точке резонанса при высоких значениях добротности контура может существенно превышать амплитудное значение питающего напряжения, так как $U_{mC} = U_{mL} = QE_m$, а ток, значение которого пропорционально K_{ur}/r , при резонансной частоте ω_0 ограничивается лишь активным сопротивлением r и совпадает по фазе с приложенным напряжением, что показано на рис. 14.6, в.

Напряжение U_{mC} при частоте, близкой к нулю, равно амплитудному значению E_m и по мере увеличения частоты сначала увеличивается, а затем при $\omega > \omega_0$ начинает убывать, стремясь к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. Его фаза относительно фазы E_m при этом изменяется от 0 до $-\pi$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Передаточные функции K_m и K_{mC} , построенные на комплексной плоскости в виде ФХЧ, приведены на рис. 14.6, г и 14.6, д. На них нанесены точки, соответствующие расчетным частотам $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$. АФХ передаточной функции $K_{ur}(j\omega)$, представляющая собой в некотором масштабе комплексную функцию входной проводимости $Y_m(j\omega)$ контура, изображена окружностью и расположена в правой части комплексной плоскости.

Лекция 15. Расчет цепей при несинусоидальном периодическом напряжении

Расчет установившейся реакции на негармоническое периодическое воздействие выполняется методом гармонического анализа, в основу которого положен принцип наложения. При этом в качестве элементарных составляющих выбирают n гармонических составляющих ряда Фурье, которыми приближенно изображают входное возмущение. Число учитываемых гармоник зависит от быстроты сходимости ряда и требуемой точности расчета.

Если на входе цепи действует источник периодического напряжения

$$x(t) = e(t) = E_0 + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n \dot{E}_{mk} e^{jk\omega_1 t} \right) \quad (15.1)$$

или тока

$$x(t) = j(t) = J_0 + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n \dot{J}_{mk} e^{jk\omega_1 t} \right), \quad (15.2)$$

где $\dot{E}_{mk} = E_{mk} e^{-j\alpha_{rk}}$; $\dot{J}_{mk} = J_{mk} e^{-j\alpha_{jk}}$,

то согласно принципу наложения, он может быть представлен в виде 1 + n последовательно (рис. 15.1, а, б) или параллельно (рис. 15.1, в) включенных источников гармонических сигналов.

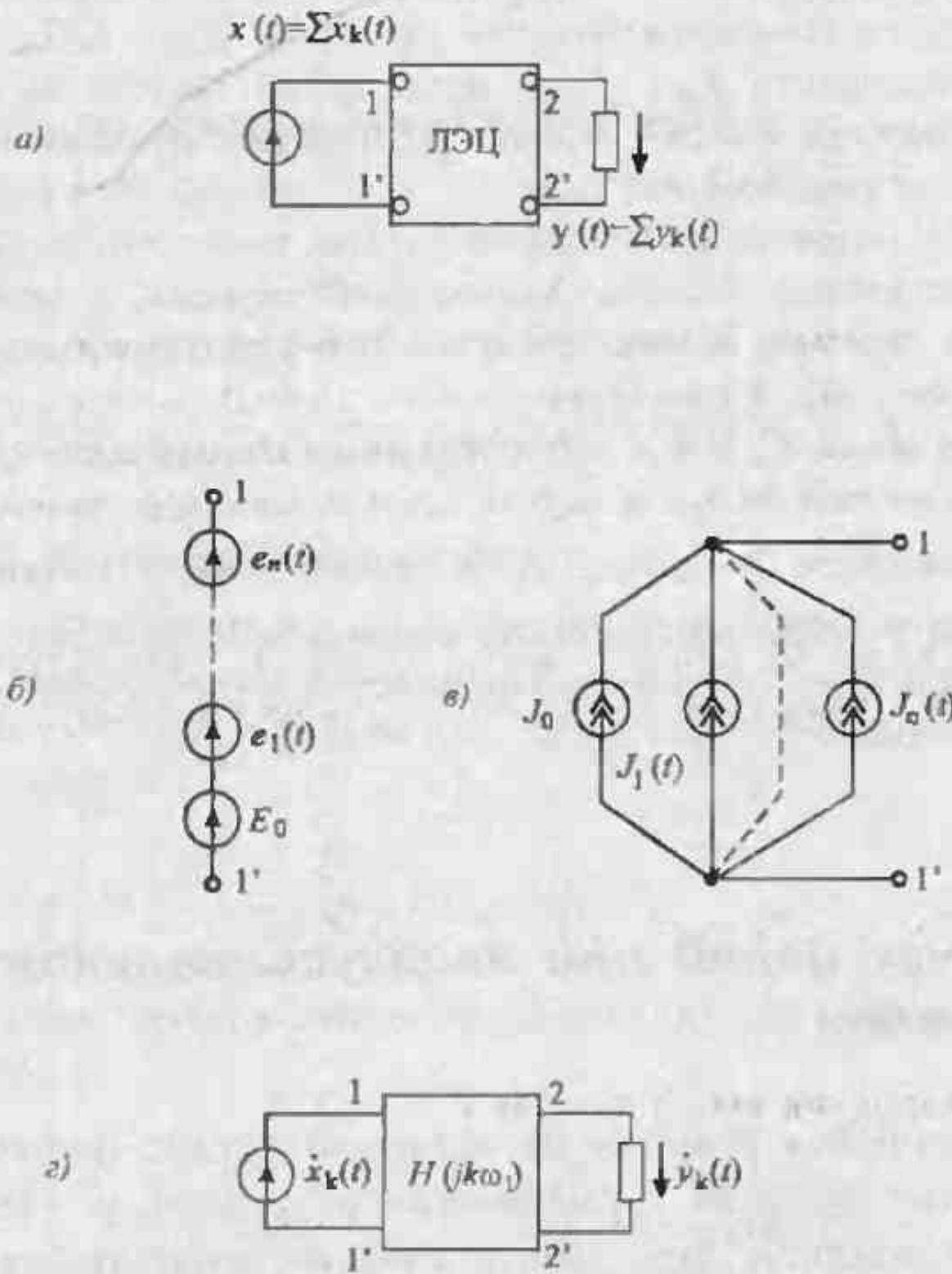


Рис. 15.1. Негармоническое воздействие на линейную цепь (а), схемы его замещения (б, в) и представление в комплексной форме (г)

Реакцию на выходе рассчитывают отдельно для каждого из гармонических воздействий частоты $k\omega_1$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) (рис.15.1, з), а затем эти составляющие суммируют. Расчет обычно выполняют методом комплексных амплитуд, при этом предварительно должна быть определена комплексная передаточная функция $H(jk\omega_1)$ на частотах $k\omega_1$. Результирующая реакция цепи при периодическом воздействии, согласно (14.11), имеет вид

$$y(t) = X_0 + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \dot{X}_{mk} H(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} = X_0 H(0) + \\ + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \dot{X}_{mk} |H(jk\omega_1)| e^{j(\psi_{\dot{x}} + \psi_m)} e^{jk\omega_1 t} \quad (15.3)$$

или

$$y(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n \dot{X}_{mk} H(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t}. \quad (15.4)$$

Пример 15.1. Рассчитать установившиеся реакции $u_c(t)$ и $u_r(t)$ последовательного rLC -контура (рис. 14.6, а) на периодическую последовательность прямоугольных импульсов $e(t)$ (рис.15.2) при $E = 200$ В и относительной продолжительности $\gamma = t_1/T_1 = 0,5$ для двух значений периодов следования импульсов: а) $T_{1a} = 2\pi/\omega_{1a} = 10T_0 = 10 \cdot 2\pi/\omega_0$; б) $T_{1б} = 2\pi/\omega_{1б} = T_0 = 2\pi/\omega_0$; $\omega_{1б}/\omega_0 = 1$; $\omega_{1a}/\omega_0 = 0,1$.

Решение. Для определения реакций воспользуемся методом гармонического анализа. Разложим напряжение $e(t)$ в ряд Фурье, пользуясь формулами:

$$E_0 = \frac{a_0}{2} = \gamma E = 100 \text{ В}; E_{mk} = 2\gamma E_0 \frac{\sin k\pi\gamma}{k\pi\gamma}.$$

Расчет амплитуд гармоник выполним для $k = 1 + 7$

$$E_{m1} = 2E \cdot 0,5 \frac{\sin \pi/2}{\pi/2} = 127 \text{ В}; E_{m2} = 0; E_{m3} = -42,5 \text{ В}; \\ E_{m4} = 0; E_{m5} = 25,4 \text{ В}; E_{m6} = 0; E_{m7} = -18,2 \text{ В}.$$

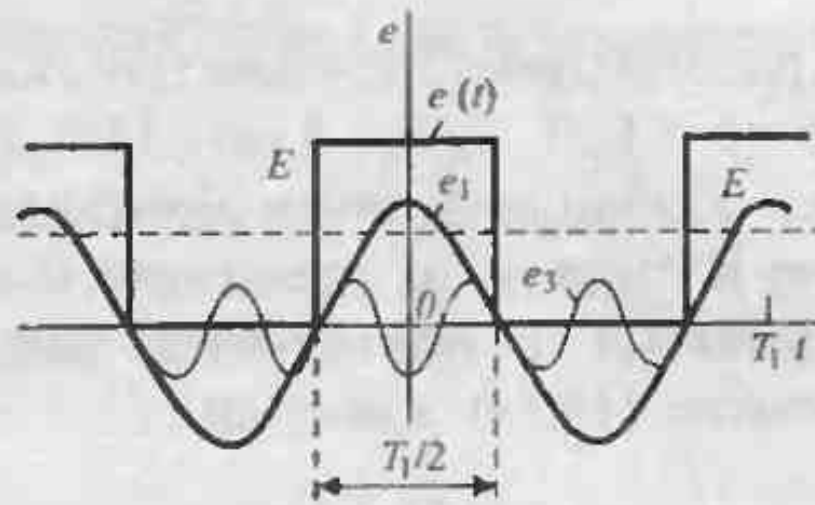


Рис. 15.2. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов и их гармонические составляющие

Результат разложения импульсного напряжения в ряд Фурье имеет вид:

$$e(t) = E_0 + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^7 E_{nk} e^{jk\omega_1 t} = 100 + 127 \cos \omega_1 t - 42,5 \cos 3\omega_1 t + 25,4 \cos 5\omega_1 t - 18,2 \cos 7\omega_1 t \text{ В.}$$

Таким образом, входное воздействие разлагается в знакопеременный ряд Фурье, члены которого убывают обратно пропорционально k и четные гармоники в нем отсутствуют. Комплексные амплитуды гармонических составляющих реакций определяем по (14.11).

В рассматриваемом случае в качестве функций цепи $H(j\omega_k)$ должны быть приняты передаточные функции контура по напряжениям K_{uc} и K_{ur} , которые были рассчитаны в примере 14.3. Для их определения воспользуемся построенными амплитудно-частотными характеристиками последовательного rLC -контура, приведенными на рис. 14.6, б, в. На шкалу частот этих характеристик нанесен амплитудный спектр входного воздействия $e(t)$ для случаев $\omega_1 = \omega_{10}$ и $\omega_1 = \omega_{1a}$.

Комплексные амплитуды гармонических составляющих реакций таковы:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{uc0} &= K_{uc} \dot{E}_0; \dot{U}_{ur0} = K_{ur} \dot{E}_0; \\ U_{uc0} &= K_{uc}(0) E_0 = 1 \cdot 100 \text{ В} = 100 \text{ В}; \\ \dot{U}_{uc1} &= |K_{uc}(j\omega_{10} / \omega_0)| e^{j\varphi} (\omega_{10} / \omega_0) \dot{E}_{m1} = 1 e^{-j5^\circ} 127 = 127 e^{-j5^\circ} \text{ В}; \\ \dot{U}_{uc3} &= 1,1 e^{-j15^\circ} (-42,5) = -46,8 e^{-j15^\circ} \text{ В}; \\ \dot{U}_{uc5} &= 1,3 e^{-j10^\circ} 25,4 = 33 e^{-j10^\circ} \text{ В}; \\ \dot{U}_{uc7} &= 2 e^{-j30^\circ} (18,2) = -32,4 e^{-j20^\circ} \text{ В}; \\ U_{ur0} &= H_{ur}(0) E_0 = 0; H_{ur1} = 0,01 e^{j90^\circ} 127 = 1,27 e^{j90^\circ} \text{ В}; \\ \dot{U}_{ur3} &= 0,05 e^{j85^\circ} (-42,5) = -2,13 e^{j85^\circ} \text{ В}; \\ \dot{U}_{ur5} &= 0,12 e^{j80^\circ} 25,4 = 3,04 e^{j80^\circ} \text{ В}; \\ \dot{U}_{ur7} &= 0,26 e^{j70^\circ} (-18,2) = -4,73 e^{j70^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Найденные значения комплексных амплитуд позволяют записать реакции $u_C(t)$ и $u_r(t)$ в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned} u_C &= 100 + 127 \cos(\omega_{10} t - 3^\circ) - 46,8 \cos(3\omega_{10} t - 5^\circ) + \\ &+ 33 \cos(5\omega_{10} t - 10^\circ) - 32,4 \cos(7\omega_{10} t - 20^\circ) \text{ В}; \\ u_r &= 1,27 \cos(\omega_{10} t + 90^\circ) - 2,13 \cos(3\omega_{10} t + 85^\circ) + \\ &+ 3,04 \cos(5\omega_{10} t + 80^\circ) - 4,73 \cos(7\omega_{10} t + 70^\circ) \text{ В}. \end{aligned}$$

Анализируя результаты расчета, заметим, что форма кривой напряжения u_C слабо отличается от формы приложенного напряжения $e(t)$. Это объясняется тем, что значимые частоты гармоник входного напряжения $k\omega_{10}/\omega_0$ лежат в низкочастотной области, где модуль $|K_{u_C}(j\omega k)|$ и фаза $\psi_{u_C}(j\omega k)$ изменяются с частотой весьма незначительно. Постоянная составляющая $e(t)$ полностью выделяется на конденсаторе, а в токе $i = u_r/r$ и напряжении u_r , она отсутствует. Поэтому rLC -контур в случае размещения спектра входного воздействия в зоне $\omega_{\max} < \omega_0$, когда выходное напряжение снимается с конденсатора, является фильтром нижних частот.

Рассмотрим второй случай, когда частота воздействия $\omega_1 = \omega_{10}$ равна собственной частоте колебаний и контур настроен в резонанс основной гармонике $e(t)$. При этом $\omega_1 = \omega_{10}$ и первые гармоники реакций u_C и u_r окажутся усиленными, так как расположены в зоне максимумов функций цепи $K_{u_C}(j\omega)$, $K_{u_r}(j\omega)$, а высшие гармоники ($k = 3, 5, 7, \dots$) окажутся в частотной области, соответствующей нисходящим ветвям характеристик. Модули $|H_{u_C}(j3\omega_{10})|$ и $|H_{u_r}(j3\omega_{10})|$ настолько малы, что гармониками в кривых реакций u_C и u_r при $k \geq 3$ можно пренебречь (см. рис. 14.6, б). Комплексные амплитуды основных гармонических составляющих реакций u_C и u_r при $\omega_1 = \omega_{10} = \omega_0$ имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{u_C1} &= K_{u_C}(j\omega_{10}/\omega_0) e^{j\psi} u_C(\omega_{10}/\omega_0) \dot{E}_{m1} = 5e^{-j90^\circ} 127 = 635e^{-j90^\circ} \text{ В}; \\ \dot{U}_{u_r1} &= K_{u_r}(j\omega_{10}/\omega_0) e^{j\psi} u_r(\omega_{10}/\omega_0) \dot{E}_{m1} = 1 \cdot 127 = 127 \text{ В}; \\ u_C &= 100 + 635 \cos(\omega_{10} t - 90^\circ) \text{ В}; \\ u_r &= 127 \cos \omega_{10} t \text{ В}. \end{aligned}$$

Таким образом, при настройке контура в резонанс в выходных реакциях основную роль играет первая гармоника и резонансный контур может быть использован для усиления сигнала по напряжению и выделения основной частоты, т. е. служит фильтром основной гармоники входного возмущения.

Пример 15.2. Рассчитать квазистационавшиеся реакции i_r , i_L и i_C параллельного rLC -контура (рис. 15.3, а) на входное симметричное относительно оси абсцисс прямоугольное напряжение $u(t)$, имеющее максимальное значение $U = 100$ В. Расчет выполнить в относительных единицах для двух значений частот входного сигнала: $\omega_{10} = 0,1\omega_0$ и $\omega_{10} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

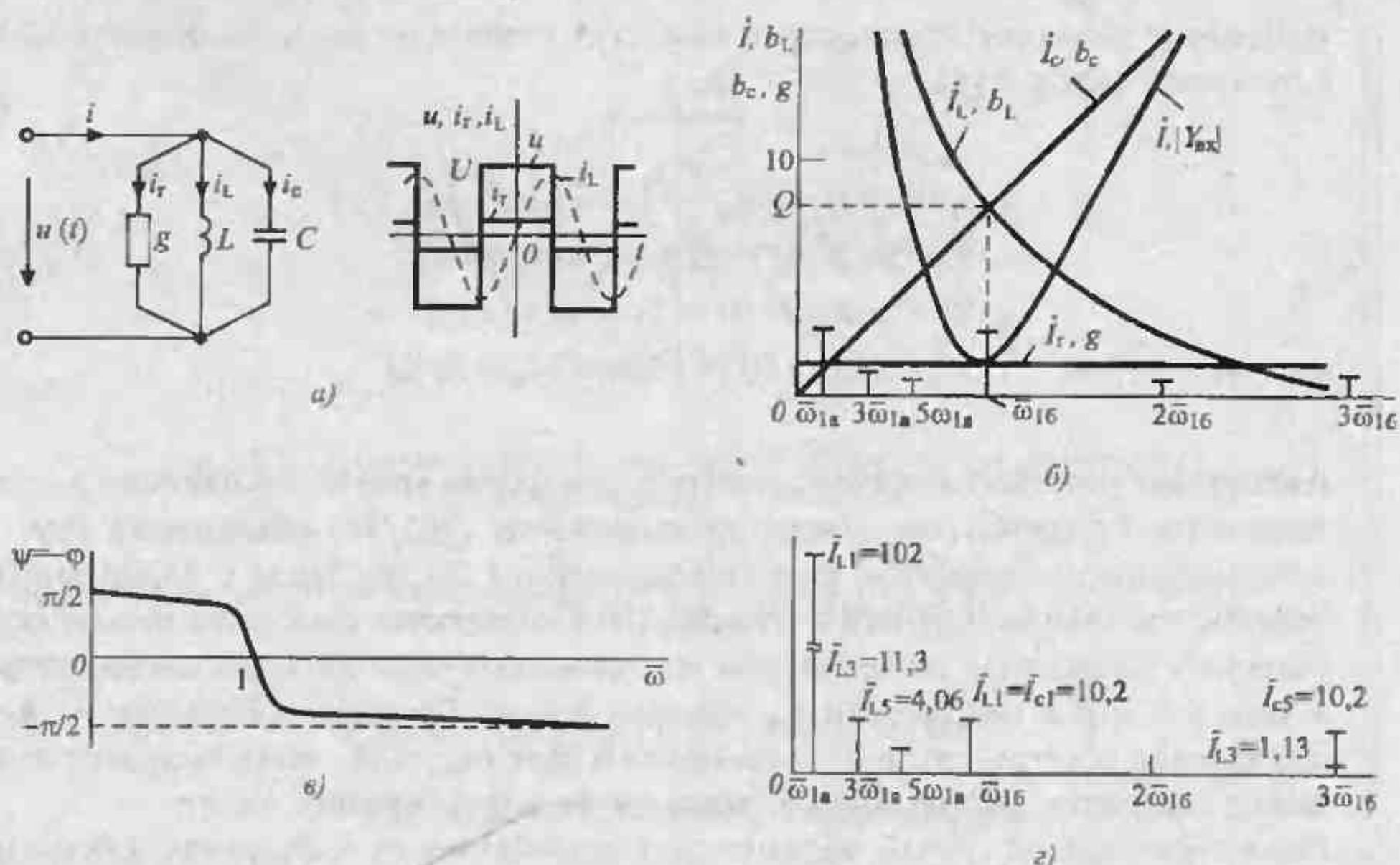


Рис. 15.3. Параллельный контур (а), его частотные (б) и фазовые (в) характеристики, амплитудные спектры (г)

Решение. Заданное входное напряжение $u(t)$ представляет собой переменную составляющую входного напряжения, рассмотренного в примере 15.1, поэтому

$$u(t) = e(t) - E_0 = 127 \cos \omega_1 t - 42,5 \cos 3\omega_1 t + 25,4 \cos 5\omega_1 t + \dots + B;$$

поэтому

$$u_r = u_L = u_C = \sum_{k=1}^5 U_{mk} \cos k\omega_1 t;$$

$$U_{m1} = 127 \text{ В}; U_{m3} = -42,5 \text{ В}; U_{m5} = 25,4 \text{ В}.$$

Частотные характеристики для токов параллельных ветвей резонансного контура выражаются следующими зависимостями:

$$i_r = gu(t); \dot{I}_{mr} = g\dot{U}_m; i_L = \frac{1}{L} \int u(t) dt;$$

$$\dot{I}_{mL} = \dot{U}_m / (j\omega L) = \dot{U}_m e^{-j\pi/2} / \omega L = \dot{U}_m e^{-j\pi/2} / X_L;$$

$$i_C = C \frac{du}{dt}; \dot{I}_{mC} = j\omega C \dot{U}_m = \omega C \dot{U}_m e^{j\pi/2} = b_C \dot{U}_m e^{j\pi/2}.$$

Модули этих зависимостей в относительных единицах:

$$\bar{I}_{mr} = |\dot{I}_{mr}| / (Ug) = U_m / U;$$

$$\bar{I}_{mL} = |\dot{I}_{mL}| / (Ug) = U_m Q / (\bar{\omega} U);$$

$$\bar{I}_{mC} = |\dot{I}_{mC}| / (Ug) = U_m \omega C / (Ug) = Q \bar{\omega} U_m / U,$$

где $\bar{\omega} = \omega / \omega_0$ — относительная частота;

$Q = b/g = \omega_0 C/g = 1/(\omega_0 Lg)$ — добротность параллельного контура.

Комплексная амплитуда тока в цепи питания

$$\dot{I}_m = \dot{I}_{mr} + \dot{I}_{mL} + \dot{I}_{mC} = [g + 1/(j\omega L) + j\omega C] \dot{U}_m = Y_{\text{вх}}(j\omega) \dot{U}_m.$$

Комплексная входная проводимость параллельного контура

$$Y_{\text{вх}}(j\omega) = g - j[1/(\omega L) - \omega C] = g - j(b_L - b_C) = g - jb;$$

$$Y_{\text{вх}}(j\omega) = g \left[1 + j \frac{\omega C - 1/\omega L}{g} \right] = g \left[1 + j \frac{\omega_0 C}{g} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] =$$

$$= g \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] = |Y_{\text{вх}}| e^{-j\varphi} = |Y_{\text{вх}}| e^{-j\psi}.$$

Модуль и фаза $Y_{\text{вх}}$ имеют следующие значения:

$$|Y_{\text{вх}}(j\omega)| = g \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} = f(\bar{\omega}),$$

$$-\varphi = \psi = \text{arctg} \left[Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] = f_1(\bar{\omega}).$$

Эти частотные зависимости представлены на рис.15.3, б, в. Там же нанесены амплитудные спектры входного напряжения для двух случаев: $\omega_1 = \omega_{1\alpha} = 0,1\omega_0$ (сплошные линии); $\omega_1 = \omega_{1\beta} = \omega_0$ (штриховые линии). Относительные амплитуды k -х гармонических составляющих реакций:

$$\bar{I}_{mrk} = U_{mk} / U \quad \text{и} \quad \bar{I}_{rk} = U_{mk} / U;$$

$$\bar{I}_{mLk} = \frac{Q}{\bar{\omega}_k} \frac{U_{mk}}{U} e^{-j\pi/2} \quad \text{и} \quad \bar{I}_{Lk} = \frac{Q}{\bar{\omega}_k} \frac{U_{mk}}{U};$$

$$\bar{I}_{mCk} = Q \bar{\omega}_k \frac{U_{mk}}{U} e^{j\pi/2} \quad \text{и} \quad \bar{I}_{Ck} = Q \bar{\omega}_k \frac{U_{mk}}{U},$$

где $\bar{\omega}_k = \omega_k / \omega_0$ — относительная частота k -й гармоники тока.

Заметим, что реакция в резистивной ветви не зависит от частоты; следовательно, форма кривой тока i_r будет совпадать с формой кривой приложенного напряжения $u(t) = \bar{u}_m \sin(\omega_0 t)$ (рис. 15.3, а). Гармонический же состав реакций (токов) в реактивных ветвях L и C зависит не только от значений гармоник воздействия, но и от частоты, так как их входные проводимости являются частотно-зависимыми параметрами.

Рассчитаем относительные амплитуды пяти первых гармонических составляющих токов i_r, i_L, i_C при $\omega_1 = \omega_{10} = 0,1\omega_0$ и $\bar{\omega}_{10} = 0,1$:

$$\bar{I}_{nr1} = U_{m1}/U = 127/100 = 1,27; \bar{I}_{nr3} = 42,5/100 = 0,425;$$

$$\bar{I}_{nr5} = 25,4/100 = 0,254;$$

$$\bar{I}_{mL1} = (U_{m1}/U)(Q/\bar{\omega}_{10}) = 1,27 \cdot 8/0,1 = 102;$$

$$\bar{I}_{mL3} = 0,425 \cdot 8/(3 \cdot 0,1) = 11,3; \bar{I}_{mL5} = 0,254 \cdot 8/0,5 = 4,06;$$

$$\bar{I}_{mC1} = U_{m1} Q \omega_{10} / U = 1,27 \cdot 0,1 \cdot 8 = 1,02;$$

$$\bar{I}_{mC3} = 0,425 \cdot 0,8 \cdot 0,1 = 1,02; \bar{I}_{mC5} = 0,254 \cdot 8 \cdot 0,5 = 1,02.$$

Комплексные относительные амплитуды:

$$\dot{\bar{I}}_{nr1} = \bar{I}_{nr1} e^{j0} = 1,27; \dot{\bar{I}}_{nr3} = -\bar{I}_{nr3} = -0,425;$$

$$\dot{\bar{I}}_{nr5} = \bar{I}_{nr5} = 0,254; \dot{\bar{I}}_{mL1} = \bar{I}_{mL1} e^{-j\pi/2} = -102 e^{-j\pi/2};$$

$$\dot{\bar{I}}_{mL3} = \bar{I}_{mL3} e^{-j\pi/2} = -11,3 e^{-j\pi/2};$$

$$\dot{\bar{I}}_{mL5} = \bar{I}_{mL5} e^{-j\pi/2} = 4,06 e^{-j\pi/2}; \dot{\bar{I}}_{mC1} = \bar{I}_{mC1} e^{j\pi/2} = 1,02 e^{j\pi/2};$$

$$\dot{\bar{I}}_{mC3} = \bar{I}_{mC3} e^{j\pi/2} = 1,02 e^{j\pi/2}; \dot{\bar{I}}_{mC5} = \bar{I}_{mC5} e^{j\pi/2} = 1,02 e^{j\pi/2}.$$

Переходя к функциям вещественной переменной времени t , найдем выражения токов в ветвях в виде рядов Фурье:

$$\bar{i}_r = i_r / (Ug) = 1,27 \cos \omega_{10} t - 0,425 \cos 3\omega_{10} t + 0,254 \cos 5\omega_{10} t;$$

$$\bar{i}_L = i_L / (Ug) = 102 \cos(\omega_{10} t - 90^\circ) - 11,3 \cos(3\omega_{10} t - 90^\circ) + 4,06 \cos(5\omega_{10} t - 90^\circ);$$

$$\bar{i}_C = i_C / (Ug) = 1,02 \cos(\omega_{10} t + 90^\circ) - 1,02 \cos(3\omega_{10} t + 90^\circ) + 1,02 \cos(5\omega_{10} t + 90^\circ).$$

Выполнив аналогичные расчеты для второго значения частоты входного напряжения $\omega_{16} = \omega_0$ и $\omega_{16} = 1$, соответственно получим:

$$\bar{i}_r = 1,27 \cos(\omega_{16} t) - 0,425 \cos 3\omega_{16} t + 0,254 \cos 5\omega_{16} t;$$

$$\bar{i}_L = 10,2 \cos(\omega_{16} t - 90^\circ) - 1,13 \cos(3\omega_{16} t - 90^\circ) + 0,406 \cos(5\omega_{16} t - 90^\circ);$$

$$\bar{i}_C = 10,2 \cos(\omega_{16}t + 90^\circ) - 10,2 \cos(3\omega_{16}t + 90^\circ) + \\ + 10,2 \cos(5\omega_{16}t + 90^\circ).$$

Амплитудные спектры токов \bar{i}_L и \bar{i}_C для двух частот ω_{1a} и ω_{16} даны на рис. 15.3, з.

Анализируя полученные результаты, отметим следующее:

1) гармонический состав тока в резистивной ветви не зависит от частоты и определяется только формой приложенного напряжения;

2) форма тока для ветвей с реактивными элементами зависит как от формы входного напряжения, так и от частоты;

3) высшие гармоники в индуктивной ветви ослабляются, и кривая тока i_L всегда сглажена по сравнению с током i_r (в рассматриваемом примере амплитуды гармоник тока изменяются обратно пропорционально k^2 и высшими гармониками в кривой тока можно пренебречь (рис. 15.3, а);

4) несмотря на убывание пропорционально номеру гармоники гармонических составляющих напряжения, гармоники в кривой тока i_C с увеличением k не убывают;

5) в области низких частот ($\omega_1 = \omega_{1a} \ll \omega_0$) превалирует ток индуктивной ветви и параллельный контур имеет индуктивную реакцию (в области высоких частот, когда $\omega_1 > \omega_0$ преобладает емкостная реакция);

6) при настройке контура в резонанс основной частоте напряжения ($\omega_1 = \omega_{16} = \omega_0$) амплитуды токов первых гармоник I_{mL1} и I_{mC1} равны и превышают амплитуду I_{mr1} в Q раз; 7) гармонические составляющие токов параллельных реактивных ветвей L и C всегда находятся в противофазе.

ЛЕКЦИЯ 16. Резонансы в электрических цепях

Условия резонансов в электрических цепях. Резонансом называют такое состояние двухполюсной электрической цепи, содержащей индуктивности и емкости, при котором сдвиг фаз между напряжением и током на зажимах этой цепи равен нулю.

В лекции 14 было показано, что свойства линейного пассивного двухполюсника полностью определяются его входными функциями: комплексным входным сопротивлением $Z_{ex}(j\omega) = \dot{U}_{ex} / \dot{I}_{ex}$ или комплексной входной проводимостью $Y_{ex}(j\omega) = \dot{I}_{ex} / \dot{U}_{ex}$. При этом $Z_{ex} = r_{ex}(\omega) + jx_{ex}(\omega) = z_{ex}(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$, где $r_{ex}(\omega)$ — положительное активное входное сопротивление, $x_{ex}(\omega)$ — реактивное

входное сопротивление, $z_{ex}(\omega) = \sqrt{r_{ex}^2 + x_{ex}^2}$ — модуль входного сопротивления, $\varphi(\omega)$ — сдвиг фаз между напряжением и током. Аналогично определяют комплексную входную проводимость $Y_{ex} = 1/Z_{ex} = g_{ex}(\omega) - jb_{ex}(\omega) = ye^{-j\varphi(\omega)}$, где $g_{ex}(\omega)$ — положительная активная входная проводимость, $b_{ex}(\omega)$ — реактивная входная проводимость, $y_{ex}(\omega) = \sqrt{g_{ex}^2 + b_{ex}^2}$ — модуль входной проводимости.

Очевидно, что ток и напряжение на зажимах двухполюсника будут совпадать по фазе (т. е. $\varphi(\omega) = 0$) при выполнении условия $x_{ex}(\omega) = 0$ (рис. 16.1а). При этом активная составляющая входного сопротивления r_{ex} определяет потери в резонансной цепи и на выполнение условий резонанса не влияет.

Аналогичным образом можно показать, что резонансное состояние двухполюсника может быть также получено при выполнении другого условия, при котором реактивная составляющая входной проводимости $b_{ex}(\omega) = 0$ (рис. 16.1, б). Таким образом, двухполюсник будет находиться в резонансном состоянии при выполнении одного из двух условий

$$x_{ex}(\omega) = 0, \text{ или} \quad (16.1)$$

$$b_{ex}(\omega) = 0. \quad (16.1a)$$

Если в цепи выполняется условие (16.1), то такой резонанс называют *резонансом напряжений*, так как в этом случае напряжение на реактивном сопротивлении x_{ex} равно нулю и, следовательно, напряжение на результирующем индуктивном сопротивлении численно равно напряжению на результирующем емкостном сопротивлении, т. к. $\dot{U}_L = -\dot{U}_C$.

Если же в цепи выполняется условие (16.1a), то такой резонанс называют *резонансом токов*. При этом ток в реактивной проводимости b_{ex} равен нулю и, следовательно, ток в результирующей индуктивной проводимости численно равен току в результирующей емкостной проводимости, т. к. $\dot{I}_L = -\dot{I}_C$.

Частотные зависимости параметров двухполюсников принято называть их характеристиками. Поскольку на резонансные явления в двухполюсниках влияют реактивные характеристики x_{ex} и b_{ex} , то вначале рассмотрим реактивные двухполюсники, которые состоят только из индуктивностей и емкостей.

Резонансы в реактивных двухполюсниках. Вначале рассмотрим частотные характеристики одноэлементных реактивных двухполюсников. Если двухполюсник содержит только индуктивность L (рис. 16.2, а), то его реактивное сопротивление $x_{ex} = \omega L$ изменяется прямо пропорционально частоте (рис. 16.2, б). Очевидно, что резонансных явлений в таком двухполюснике не может быть.

Если же реактивный двухполюсник содержит только емкость (рис. 16.3, а), то его реактивное сопротивление $x_{ex}(\omega) = 1/(\omega C)$ изменяется обратно пропорционально частоте, как показано на рис. 16.3, б. Резонансных явлений в таком двухполюснике также нет.

Простейшие двухполюсники, в которых присутствуют резонансные явления, содержат индуктивность и емкость. Схема с последовательным включением L и C приведена на рис. 16.4, а.

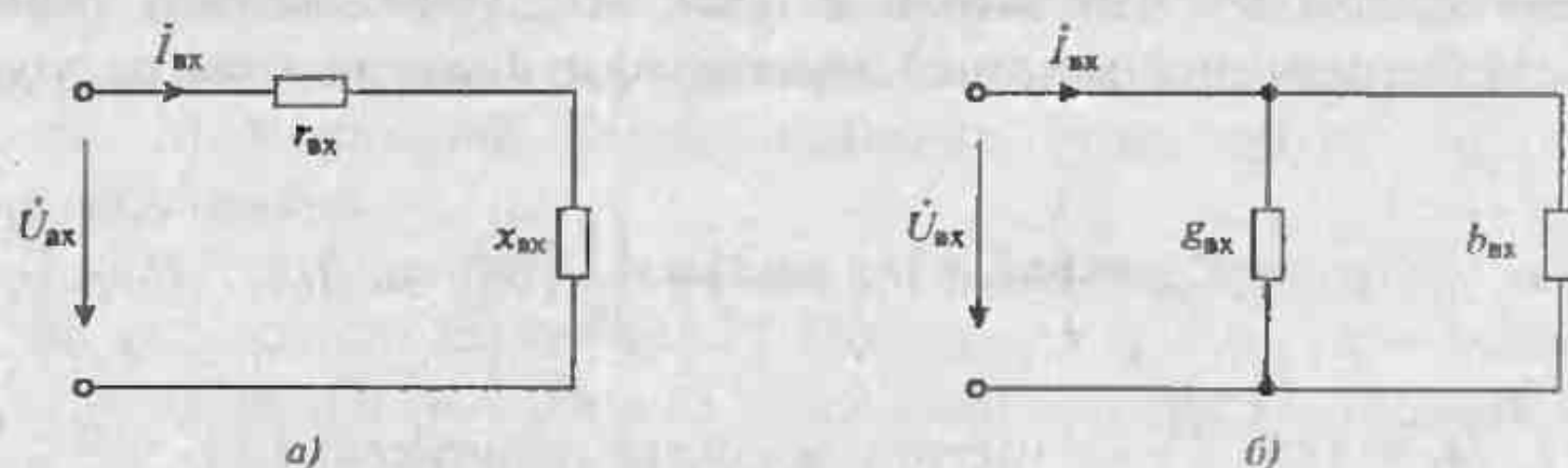


Рис. 16.1. Пассивные двухполюсники с последовательным (а) и параллельным (б) соединением элементов

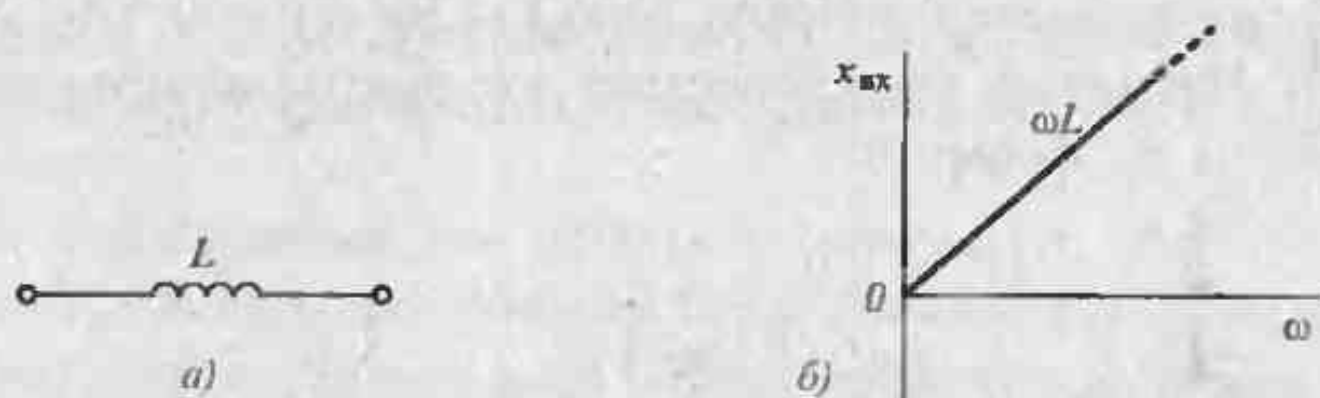


Рис. 16.2. Индуктивность (а) и ее частотная характеристика (б)

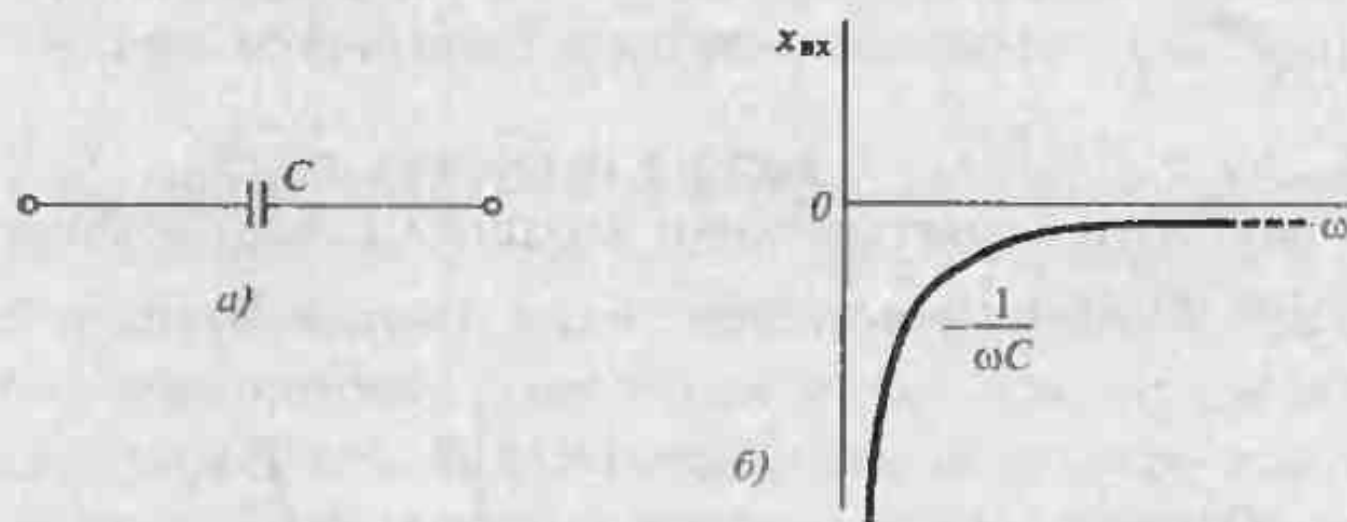


Рис. 16.3. Емкость (а) и ее частотная характеристика (б)

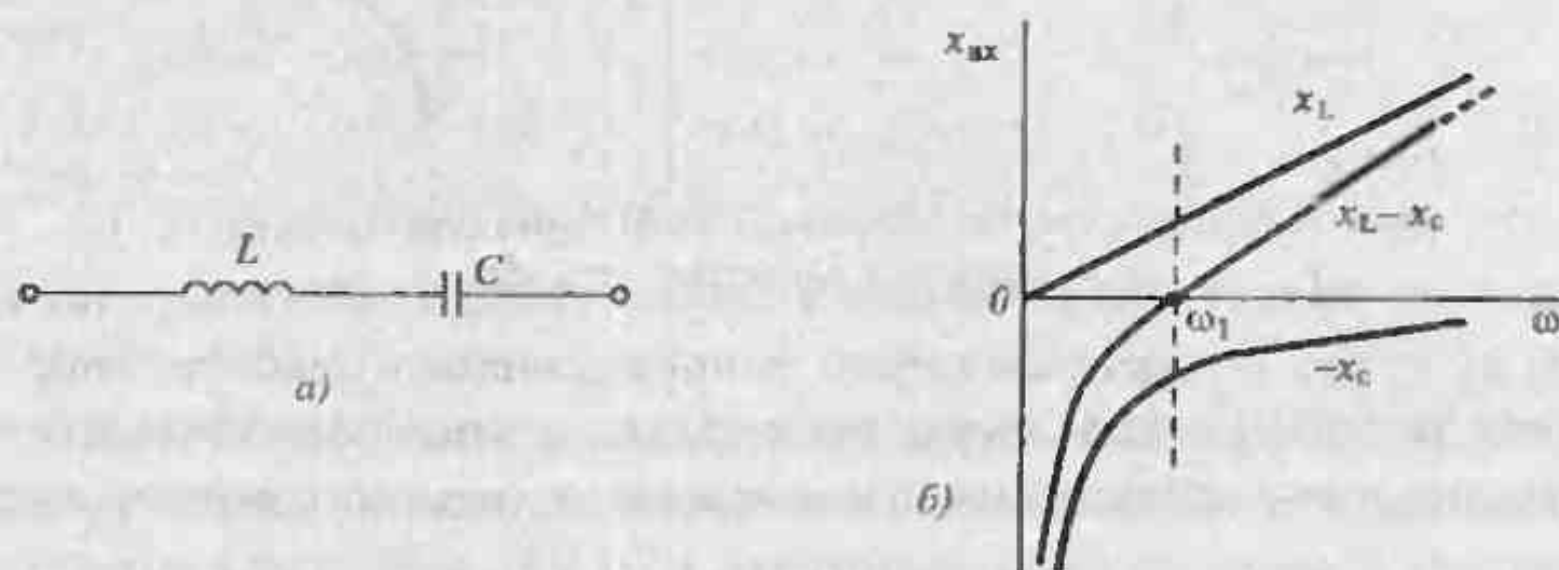


Рис. 16.4. Последовательное соединение реактивных элементов (а) и их частотная характеристика (б)

При последовательном соединении индуктивности L и емкости C реактивное входное сопротивление $x_{вх}(\omega) = x_L - x_C = \omega L - 1/(\omega C)$ изменяется, как показано на рис. 16.4,б. На резонансной частоте ω_1 выполняется условие $x_L(\omega_1) - x_C(\omega_1) = 0$, что соответствует резонансу напряжений в цепи. Используя значения резонансных сопротивлений, уравнение частотной характеристики можно записать в виде:

$$Z_{вх} = j\omega L + 1/(j\omega C) = \frac{H}{j\omega}(\omega_1^2 - \omega^2), \quad (16.2)$$

где: $H = L$, $\omega_1 = 1/\sqrt{LC}$ — частота резонанса напряжений.

Для схемы с параллельным соединением индуктивности L и емкости C (рис. 16.5,а) входная проводимость $b_{вх}(\omega) = b_L - b_C = 1/(\omega L) - \omega C$. На резонансной частоте ω_2 выполняется условие $b_L(\omega_2) - b_C(\omega_2) = 0$, что соответствует резонансу токов. Частотная характеристика входного сопротивления для этой схемы определяется по формуле:

$$Z_{вх} = jx_{вх} = \frac{j\omega L / (j\omega C)}{j(\omega L - 1/\omega C)} = Hj\omega \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2}, \quad (16.3)$$

где: $H = 1/C$, $\omega_2 = 1/\sqrt{LC}$ — частота резонанса токов.

График частотной характеристики входного сопротивления параллельного контура показан на рис. 16.5, б.

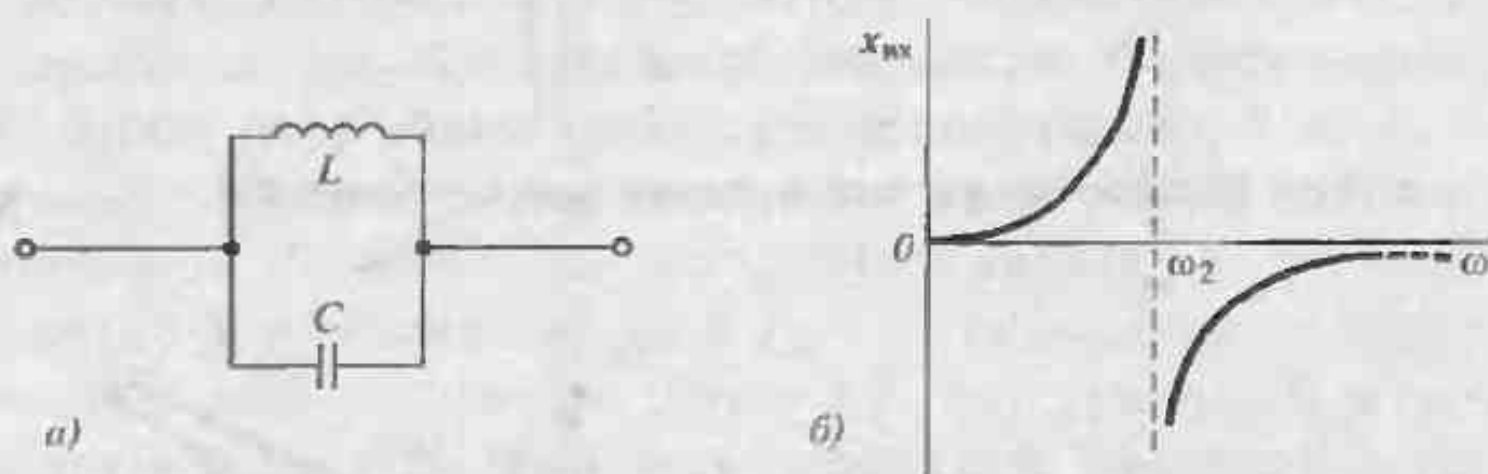


Рис. 16.5. Параллельное соединение реактивных элементов (а) и их частотная характеристика (б)

Сравнивая частотные характеристики схемы с последовательным и параллельным соединением индуктивности и емкости, можно сделать следующие выводы:

□ Число возможных резонансных частот не может быть больше общего числа корней числителя и знаменателя сопротивления (или проводи-

мости) цепи. Для реактивных двухполюсников число возможных резонансов не может превышать числа реактивных элементов без единицы ($N - 1$).

□ Для схемы с последовательным соединением элементов числитель входного сопротивления (16.2) обращается в нуль при подстановке значения $\omega = \omega_1$, иначе говоря, корень числителя характеризует «нуль» функции входного сопротивления. Корни числителя соответствуют частотам резонанса напряжений.

□ Для схемы с параллельным соединением элементов знаменатель реактивного сопротивления (16.3) обращается в нуль, что соответствует «полюсу» функции реактивного сопротивления. Корни знаменателя соответствуют частотам резонанса токов.

□ Реактивное сопротивление растет с увеличением частоты, иначе говоря, производная $dx_{\text{вх}}/d\omega$ всегда положительна (т. е. $dx_{\text{вх}}/d\omega > 0$).

□ Нули и полюсы функции реактивного сопротивления должны чередоваться, так как в противном случае производная $dx_{\text{вх}}/d\omega$ должна была бы изменить знак.

□ Если постоянный ток не может протекать в цепи, то первым будет резонанс напряжений (что соответствует полюсу функции реактивного сопротивления при $\omega = 0$, при этом общий множитель имеет значение $N/j\omega$).

□ Если постоянный ток может протекать в цепи, то первым будет резонанс токов (что соответствует нулю функции реактивного сопротивления при $\omega = 0$, при этом общий множитель имеет значение $Nj\omega$).

Отсюда следует, что в общем случае функция входного сопротивления $x_{\text{вх}}(\omega)$ реактивного двухполюсника при $\omega \rightarrow 0$ может стремиться к 0 или к $-\infty$ (т. е. может иметь нуль или полюс). Аналогично можно показать, что при $\omega \rightarrow \infty$ (функция входного сопротивления $x_{\text{вх}}(\omega)$ также может быть нулем или полюсом (т. е. стремиться к 0 или к $+\infty$). Все сказанное дает основание утверждать, что сочетание этих возможностей приводит к четырем видам характеристик реактивных резонансных двухполюсников:

- с двумя внешними нулями (0, 0),
- с двумя внешними полюсами (∞, ∞),
- с одним внешним полюсом и нулем ($\infty, 0$),
- с одним внешним нулем и полюсом (0, ∞).

Поскольку внешние нули и полюсы не характеризуют резонансы, а только определяют последовательность их чередования, то графики частотных характеристик для рассмотренных случаев приведены на рис. 16.6. Очевидно, что для двухполюсника с двумя внешними нулями первым и последним будут резонансы токов (рис. 16.6, а). Для двухполюсника с двумя внешними полюсами первым и последним будут резонансы напряжений (рис. 16.6, б). У двухполюсников с внешним полюсом и нулем первым будет резонанс напря-

жений, а последним — резонанс токов (рис. 16.6, в), а у двухполюсников с внешним нулем и полюсом первым будет резонанс токов, а последним — резонанс напряжений (рис. 16.6, г).

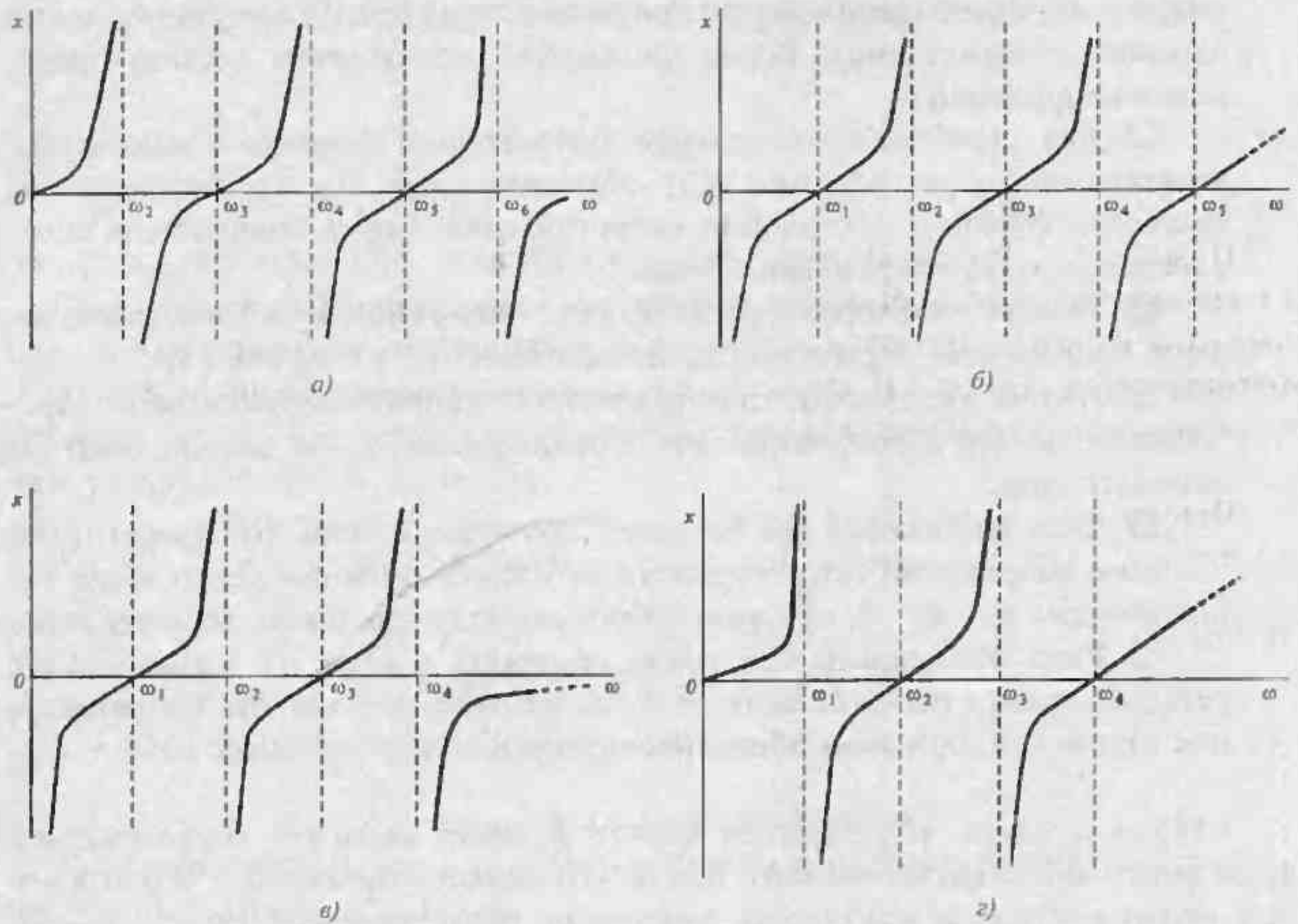


Рис. 16.6. Частотные характеристики реактивных двухполюсников: с внешними нулями (а), с внешними полюсами (б), с внешним полюсом и нулем (в), с внешним нулем и полюсом (г)

Можно показать, что в общем случае двухполюсники с внешним полюсом при $\omega \rightarrow 0$ описываются уравнением

$$Z_{\text{ex}} = \frac{H}{j\omega} = \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n-1}^2 - \omega^2)}{(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_4^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n-2}^2 - \omega^2)}, \quad (16.4)$$

где: общее число корней числителя и знаменателя равно $n + (n - 1) = 2n - 1$, корни числителя (нули функции входного сопротивления) имеют нечетные номе-

ра, корни знаменателя (полосы функции входного сопротивления) имеют четные номера, n — число независимых контуров.

Двухполюсники с внешним нулем при $\omega \rightarrow 0$ описываются уравнением

$$Z_{ax} = Hj\omega \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n-1}^2 - \omega^2)}{(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_4^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n-2}^2 - \omega^2)} \quad (16.5)$$

Из формул (16.4) и (16.5) следует, что задание резонансных частот (нулей и полюсов) однозначно определяет функцию Z_{ax} во всем диапазоне частот. Однако, для определения коэффициента H необходим анализ конкретной схемы колебательного контура. В связи с этим рассмотрим некоторые примеры определения резонансных частот.

Пример 16.1. Требуется определить резонансные частоты контура, изображенного на рис. 16.7,а, и построить его частотную характеристику.

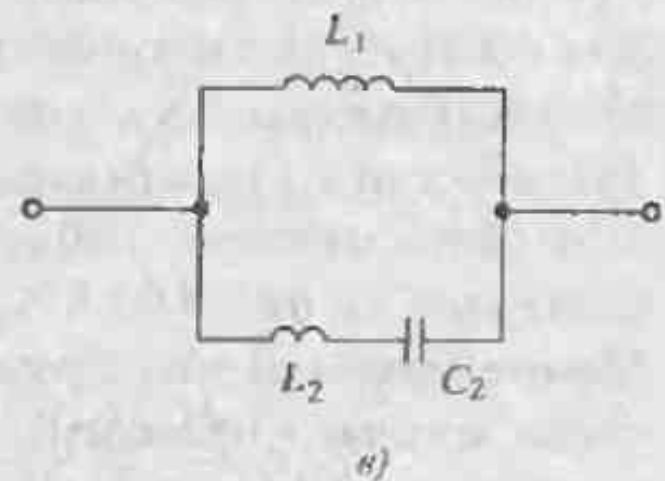
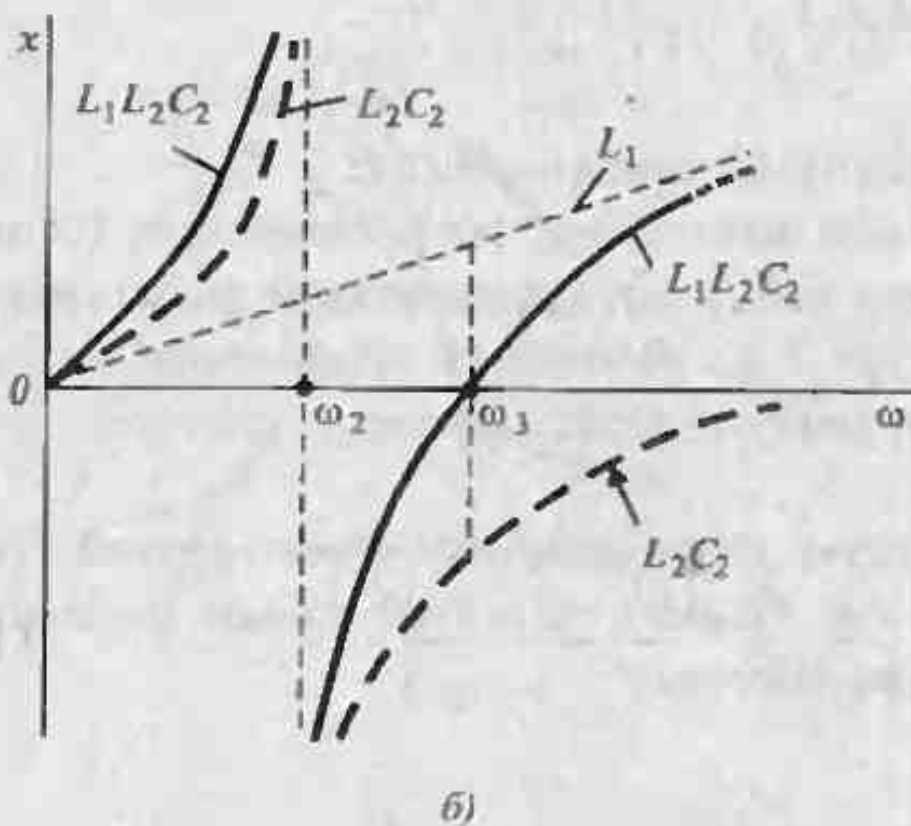
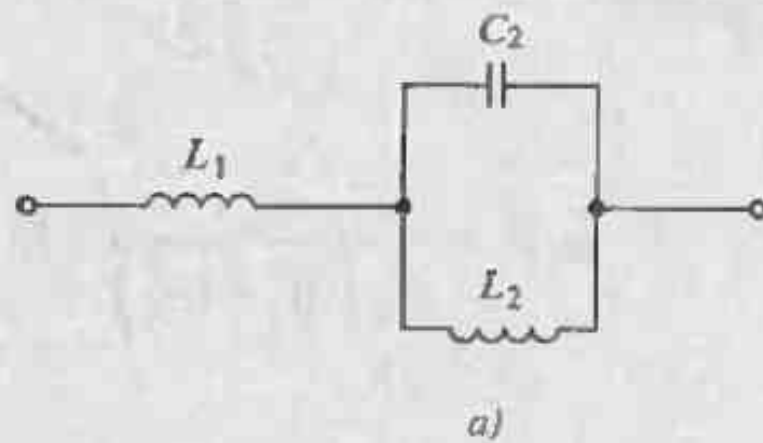


Рис. 16.7. Схема последовательно-параллельного контура (а), его частотная характеристика (б) и схема параллельно-последовательного контура (в)

Решение. Рассматриваемый контур содержит три реактивных элемента: индуктивности L_1 , L_2 и емкость C_2 , поэтому число резонансов не превышает двух. Поскольку через контур может проходить постоянный ток (через индуктивности L_1 , L_2), то первым будет резонанс токов, а вторым резонанс напряжений. Частотная характеристика контура в соответствии с формулой (16.5) определяется уравнением

$$Z_{\text{ex}} = Hj\omega \frac{\omega_3^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2}.$$

Частоту резонанса токов определим, записав комплексное сопротивление цепи

$$Z_{\text{ex}} = j\omega L_1 + \frac{j\omega}{C_2(\omega_2^2 - \omega^2)},$$

где $\omega_2 = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ — частота резонанса токов.

Для определения частоты ω_3 резонанса напряжений приравняем к нулю реактивное сопротивление цепи

$$\omega_3 L_1 + \frac{\omega_3}{C_2(\omega_2^2 - \omega_3^2)} = 0,$$

откуда находим

$$\omega_3 = \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C_2}.$$

Кроме этого, отсюда следует, что постоянный коэффициент $H = L_1$.

Для построения частотной характеристики цепи можно воспользоваться условием, что рассматриваемая схема представляет собой последовательное соединение индуктивности L_1 и параллельного контура $L_2 C_2$. Выполняя графическое сложение этих характеристик, найдем результирующую характеристику контура, которая приведена на рис. 16.7,б.

Можно показать, что такую же частотную характеристику имеет другой контур, схема которого приведена на рис. 16.7,в. Однако, для этой схемы резонансные частоты и коэффициент H имеют другие значения

$$\omega_2 = \frac{1}{(L_1 + L_2)C_2}, \omega_3 = \frac{1}{L_2 C_2}, H = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}.$$

Заметим, что резонансные частоты этих контуров можно установить, замкнув зажимы этих контуров. Если замкнуть зажимы контура, приведенного на рис. 16.7, а, то индуктивности L_1, L_2 будут включены параллельно емкости C_2 . Резонансная частота ω_3 полученного контура приведена выше. Если зажимы контура разомкнуты, то параллельно будут включены элементы L_2, C_2 , что отражено в формуле для ω_2 .

Аналогично можно определить резонансные частоты контура, изображенного на рис. 16.7, б. Если зажимы этого контура разомкнуты, то индуктивности L_1, L_2 включены последовательно и резонансная частота ω_2 имеет значение, приведенное выше. При замыкании зажимов контура индуктивность L_1 будет закорочена и в резонансном контуре будут включены элементы L_2, C_2 .

Резонанс напряжений в последовательном контуре с потерями. Схема последовательного резонансного контура с потерями приведена на рис. 16.8, а.

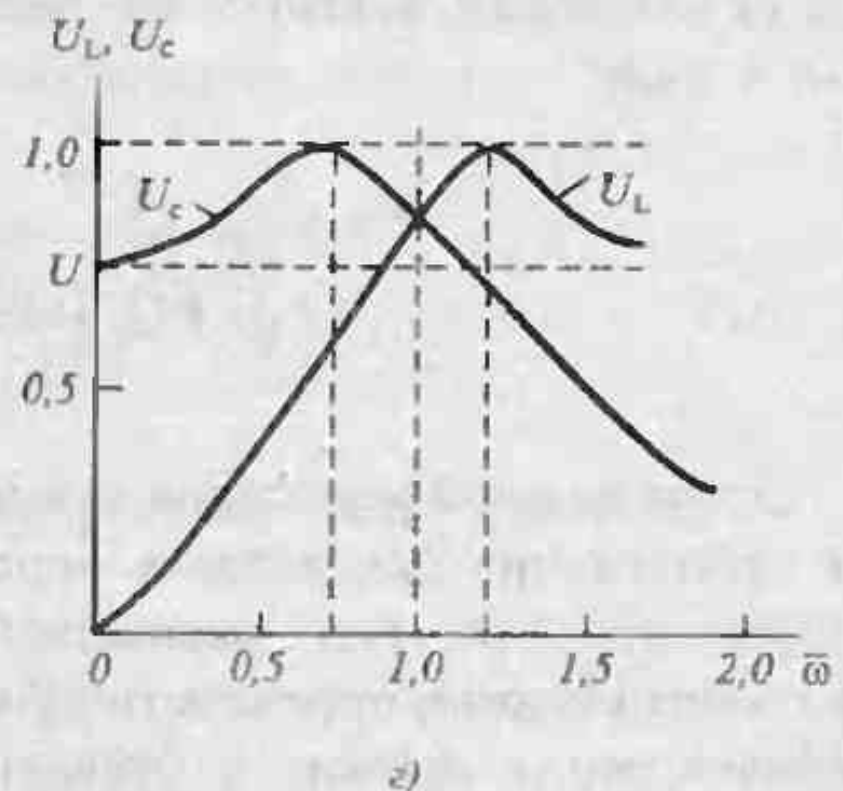
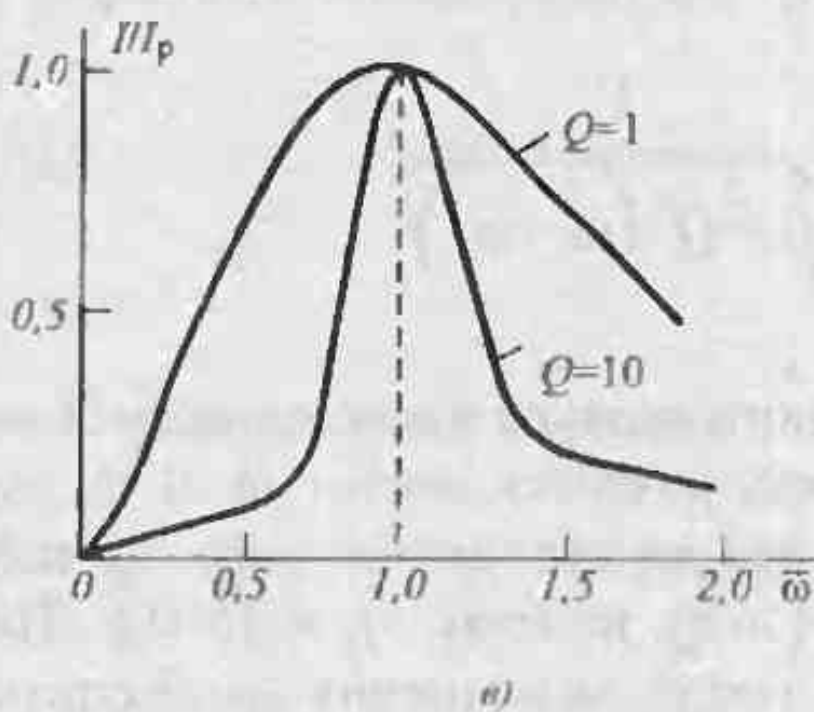
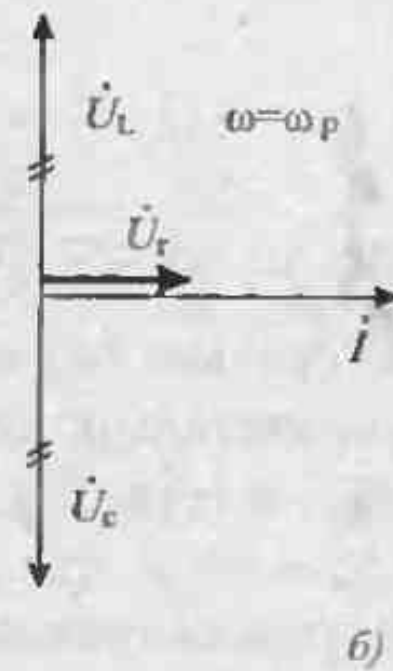
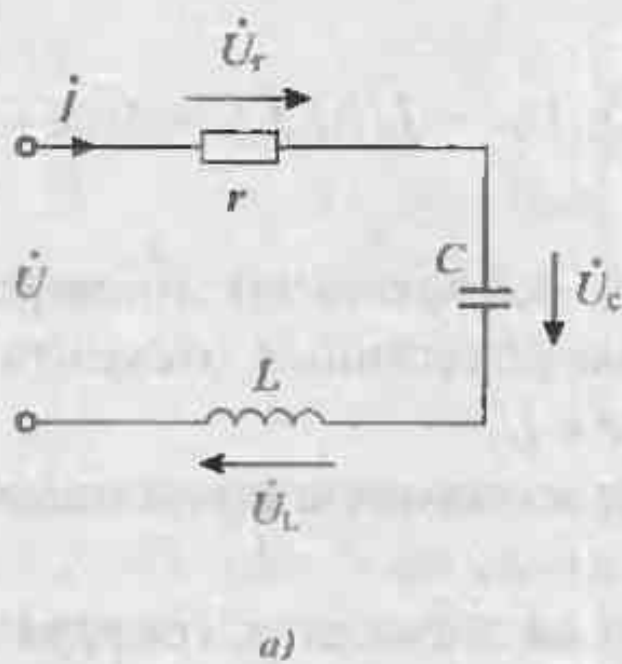


Рис. 16.8. Последовательный контур с потерями (а), его векторная диаграмма при резонансе напряжений (б), частотные характеристики тока (в) и частотные характеристики напряжений (г)

Входное сопротивление этого контура имеет значение

$$Z_{\text{вх}} = r + j(x_L - x_C) \quad (16.6)$$

где: r — сопротивление потерь,

$x_L = \omega L$, $x_C = 1/(\omega C)$ — реактивные сопротивления индуктивности и емкости, соответственно.

Ток в цепи имеет значение

$$I = \frac{U}{r + j[\omega L - 1/\omega C]} = \frac{U}{r^2 + (x_L - x_C)^2} e^{j\varphi(\omega)} = \frac{U}{z} e^{j\varphi(\omega)}. \quad (16.7)$$

На резонансной частоте $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$ ток в цепи принимает максимальное значение $I_p = U/r$ и совпадает с приложенным напряжением U по фазе. Кроме этого, на частоте резонанса напряжения на элементах контура имеют значения

$$U_{rp} = I_p r = U, \quad U_L = I_p \omega_p L = UQ, \quad U_C = I_p /(\omega_p C) = UQ,$$

где $Q = \omega_p L = 1/(\omega_p C) = \sqrt{L/C}/r = \rho/r$ — добротность контура, которая показывает, во сколько раз напряжение на реактивных элементах контура превышает напряжение источника питания U ;

$\rho = \sqrt{L/C} = \omega_p L = 1/(\omega_p C)$ — характеристическое сопротивление контура.

Векторная диаграмма тока и напряжений на элементах контура при резонансе напряжений показана на рис. 16.8,б. Используя значение относительной резонансной частоты $\bar{\omega} = \omega/\omega_p$, получим резонансную характеристику тока в виде

$$I = \frac{U}{r\sqrt{1+Q^2(\bar{\omega}-\bar{\omega}^{-1})^2}} = \frac{I_p}{\sqrt{1+Q^2(\bar{\omega}-\bar{\omega}^{-1})^2}} \quad (16.8)$$

Очень важной характеристикой резонансного контура является полоса частот пропускания $\Delta\omega$, которая определяется как разность частот ω_2 и ω_1 , при которых ток в контуре уменьшается в $\sqrt{2}$ раз по сравнению с I_p . Значения этих частот можно определить из уравнения (16.8), полагая $I/I_p = 1/\sqrt{2}$. Подстановка этого условия в уравнение (16.8) после выполнения необходимых преобразований приводит к условию

$$\Delta\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1 = Q^{-1}, \quad (16.9)$$

откуда следует, что полоса пропускания обратно пропорциональна добротности. При увеличении добротности Q полоса пропускания уменьшается. Графики частотной характеристики тока в контуре при различных значениях добротности приведены на рис. 16.8, в. Резонансные характеристики напряжений на элементах контура определяются выражениями:

$$U_r = Ir = \frac{U}{\sqrt{1 + Q^2 (\bar{\omega} - \bar{\omega}^{-1})^2}} \quad (16.10)$$

$$U_L = I\omega L = \frac{UQ\bar{\omega}}{\sqrt{1 + Q^2 (\bar{\omega} - \bar{\omega}^{-1})^2}} \quad (16.11)$$

$$U_C = I/\omega C = \frac{UQ}{\bar{\omega}\sqrt{1 + Q^2 (\bar{\omega} - \bar{\omega}^{-1})^2}} \quad (16.12)$$

Резонансные характеристики напряжений на элементах контура приведены на рис. 16.8, г. Из этих характеристик следует, что максимальные напряжения на индуктивности U_{Lm} и емкости U_{Cm} немного сдвинуты от резонансной частоты ω_p , а максимальное напряжение на сопротивлении U_{rm} совпадает с резонансной частотой ω_p . Частоты, на которых напряжения на индуктивности и емкости становятся максимальными, зависят от добротности контура Q

$$\bar{\omega}_{L,C} = \frac{1}{\sqrt{1 \pm 1/4Q^2}} \quad (16.13)$$

а сами максимальные значения одинаковы и определяются по формуле

$$U_{Lm} = U_{Cm} = \frac{UQ}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}} \quad (16.14)$$

С увеличением добротности Q этот сдвиг максимумов напряжений U_{Lm} и U_{Cm} от резонансной частоты ω_p становится весьма незначительным.

Резонанс токов в параллельном контуре с потерями. Схема параллельного резонансного контура с потерями приведена на рис. 16.9,а. На этой схеме

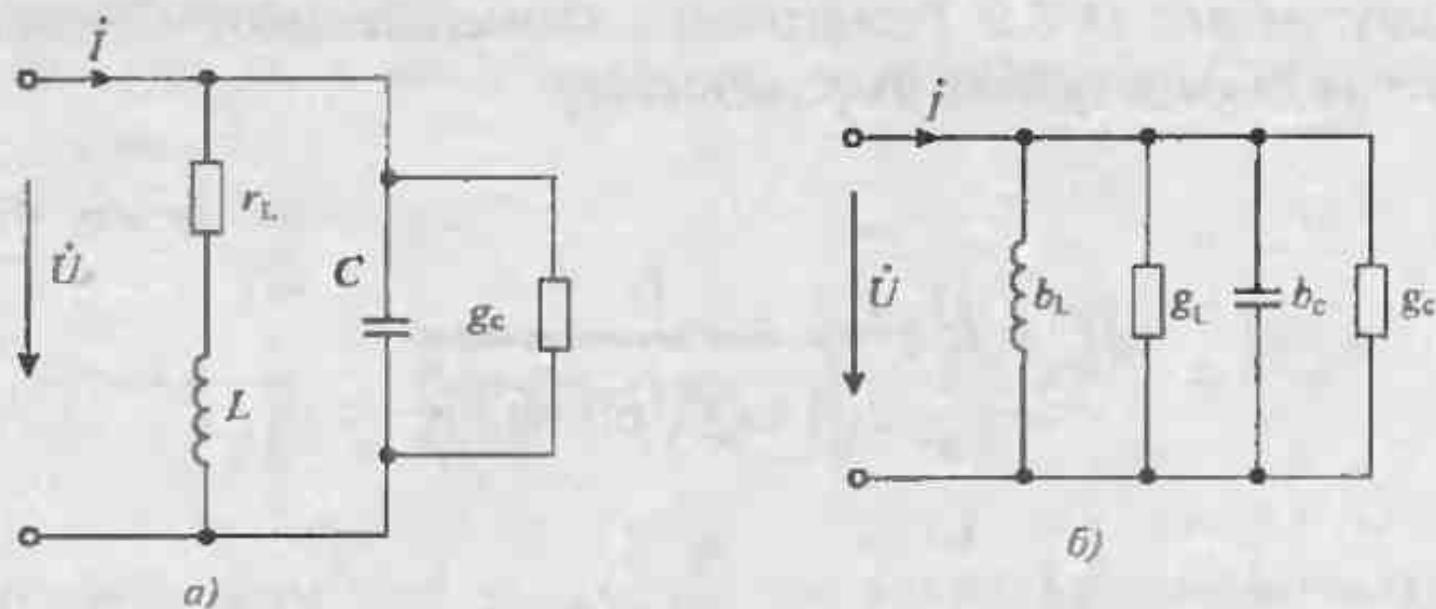


Рис. 16.9. Параллельный резонансный контур с потерями (а), его эквивалентная схема (б) и векторная диаграмма (в)

потери в катушке индуктивности учтены последовательным сопротивлением r_L , а потери в емкости — проводимостью утечки g_c . Входная проводимость контура имеет значение

$$Y_{вх} = g_{вх} - jb_{вх} \quad (16.15)$$

Для определения входной проводимости преобразуем последовательное соединение r_L и L в параллельное соединение эквивалентных проводимостей, как показано на рис. 16.9,б, где

$$g_L = \frac{r_L}{r_L^2 + x_L^2} = \frac{r_L}{r_L^2 + (\omega L)^2}, \quad (16.16)$$

$$b_L = \frac{x_L}{r_L^2 + x_L^2} = \frac{\omega L}{r_L^2 + (\omega L)^2}. \quad (16.16a)$$

Производя сложение активных и реактивных проводимостей, найдем составляющие входной проводимости

$$g_{\text{вх}}(\omega) = g_L + g_C = \frac{r_L}{r_L^2 + (\omega L)^2} + g_C, \quad (16.17)$$

$$b_{\text{вх}}(\omega) = b_L - b_C = \frac{\omega L}{r_L^2 + (\omega L)^2} - \omega C. \quad (16.17a)$$

Используя условие резонанса токов, положим $b_{\text{вх},p} = 0$, откуда находим значение резонансной частоты

$$\omega_p = \sqrt{1/(LC) - (r_L/L)^2}. \quad (16.18)$$

Векторная диаграмма токов и напряжений при резонансе токов приведена на рис. 16.9, в. Следует отметить, что в контуре с потерями минимальное значение полного тока I_p получаем не на частоте резонанса, а на другой более высокой частоте, что связано с частотной зависимостью активной проводимости $g_{\text{вх}}$.

Резонанс в индуктивно связанных контурах. Схема двух индуктивно связанных контуров приведена на рис. 16.10, а. Взаимная связь этих контуров определяется коэффициентом взаимной индукции M . Для определения входного сопротивления воспользуемся приведением вторичного контура к первичной цепи при помощи вносимого сопротивления, как показано на рис. 16.10, б

$$Z_{\text{вх}} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = Z_1 + Z_{\text{вн}} = r_1 + r_{\text{вн}} + j(x_1 + x_{\text{вн}}), \quad (16.19)$$

где $Z_1 = r_1 + jx_1 = r_1 + j(x_{L1} - x_{C1})$ — полное комплексное сопротивление первого контура;

$Z_{\text{вн}} = r_{\text{вн}} + jx_{\text{вн}} = -Z_M^2/Z_2$ — комплексное вносимое сопротивление (подробно рассмотренное в лекции 10);

$r_{\text{вн}}$ — активное вносимое сопротивление;

$x_{\text{вн}} = -x_M^2/x_2$ — реактивное вносимое сопротивление;

$x_M = \omega M$ — сопротивление взаимной индукции;

$x_2 = x_{L2} - x_{C2}$ — реактивное сопротивление вторичного контура.

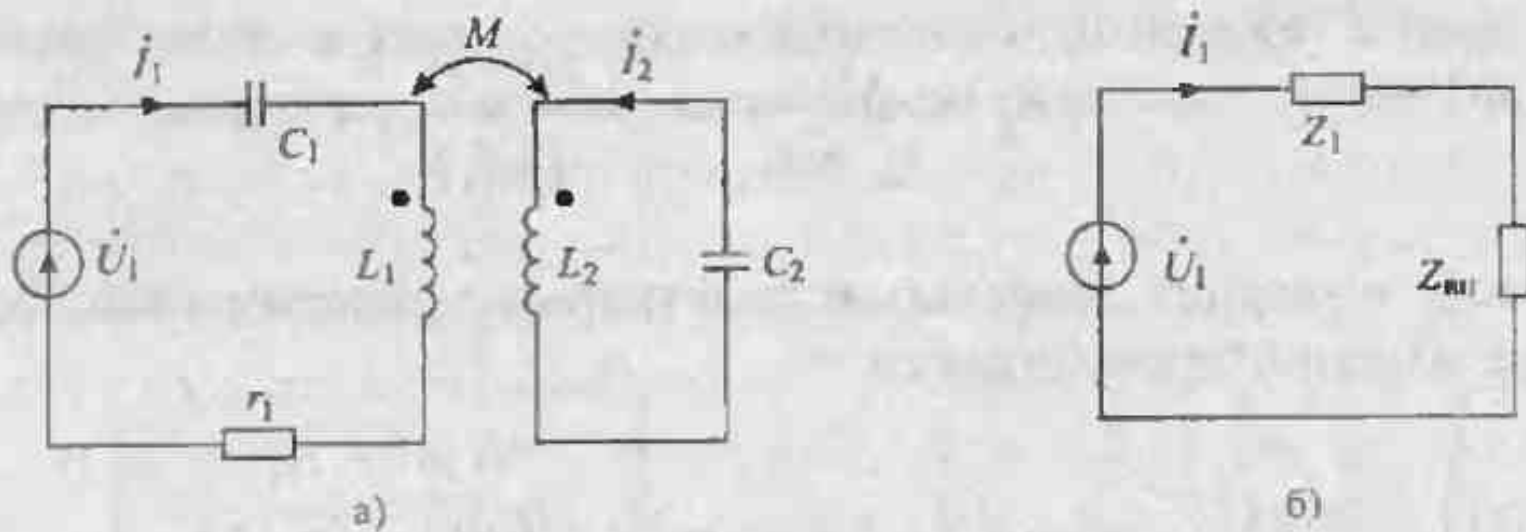


Рис. 16.10. Индуктивно связанные контуры (а) и их схема замещения (б)

После подстановки в формулу (16.19) значения вносимого реактивного сопротивления $x_{\text{ин}}$ запишем условие резонанса в цепи

$$x_{\text{ин}} = x_1 + x_{\text{ин}} = x_1 - x_M^2/x_2 = 0,$$

откуда получаем

$$x_1 x_2 = x_M^2 \quad (16.20)$$

Из формулы (16.20) следует, что резонанс в индуктивно связанной цепи наступает при выполнении условия

$$[\omega_p L_1 - 1/(\omega_p C_1)][\omega_p L_2 - 1/(\omega_p C_2)] = \omega_p^2 M^2 \quad (16.21)$$

Если использовать коэффициент связи $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$ и положить, что резонансные частоты контуров одинаковы $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ или $L_1 C_1 = L_2 C_2$, то уравнение (16.21) можно записать в виде:

$$(1 - \omega_0^2 / \omega_p^2)^2 = k^2, \quad (16.22)$$

откуда получаем, что

$$1 - \omega_0^2 / \omega_p^2 = \pm k.$$

Из этого уравнения находим значения резонансных частот индуктивно связанных контуров

$$\begin{aligned} \omega_{p1} &= \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}, \\ \omega_{p2} &= \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}, \end{aligned} \quad (16.23)$$

где $0 < k < 1$.

Выполненное рассмотрение показывает, что система индуктивно связанных контуров имеет две резонансные частоты, одна из которых ω_{p1} ниже, другая ω_{p2} выше частоты ω_0 . Это явление является очень важным свойством индуктивно связанных контуров. Эти резонансные частоты зависят от коэффициента связи и их обычно называют *частотами связи*. Расстояние между частотами ω_{p1} и ω_{p2} увеличивается с увеличением коэффициента связи k .

Внешний вид резонансных характеристик индуктивно связанных контуров показан на рис. 16.11, а. На этих резонансных характеристиках отчетливо видны два «горба», соответствующие резонансным частотам. При уменьшении k резонансные частоты сближаются и при $k = 1/Q$ резонансная характеристика контура становится одногорбой.

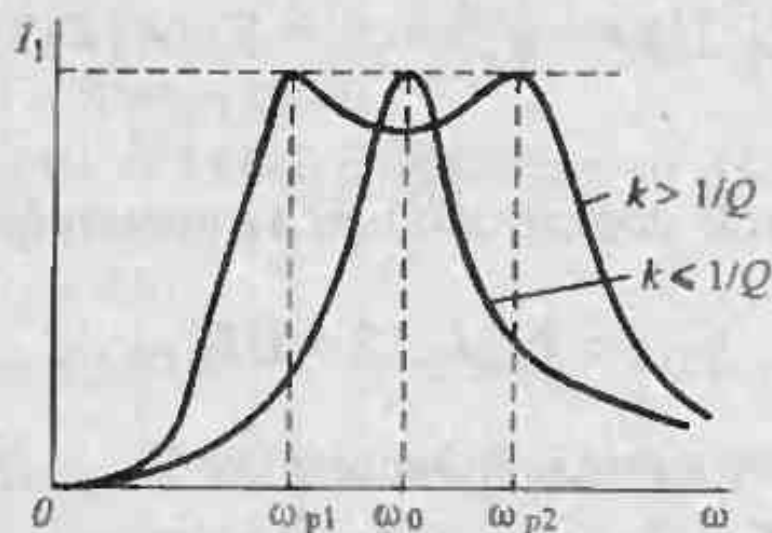


Рис. 16.11. Резонансные характеристики индуктивно связанных контуров

Лекция 17. Энергия и мощность в электрических цепях

Мощность и энергия в цепях синусоидального переменного тока. Предположим, что сложная электрическая цепь с гармоническими воздействиями и реакциями частоты ω состоит из двух частей ЭЦ₁ и ЭЦ₂ (рис. 17.1, а). Обмен электрической энергией между двумя частями цепи в каждый момент времени характеризуется *мгновенной мощностью* на общих зажимах 1–1':

$$\begin{aligned}
 p = u\dot{i} &= U_m I_m \cos(\omega t + \psi_u) \cdot \cos(\omega t + \psi_i) = \\
 &= \frac{U_m I_m}{2} \cos[(\psi_u - \psi_i) + \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)].
 \end{aligned}
 \tag{17.1}$$

Если учесть, что действующие значения гармонических напряжения u и тока i имеют значения $U = U_m/\sqrt{2}$, $I = I_m/\sqrt{2}$, а разность начальных фаз напряжения и тока $\varphi = \psi_u - \psi_i$, то выражение (17.1) преобразуется к виду:

$$p = UI \cos \varphi - UI [\cos 2(\omega t + \psi_u) - \varphi] = P + p_- \quad (17.2)$$

где $P = UI \cos \varphi$, $p_- = UI [\cos 2(\omega t + \psi_u) - \varphi]$.

Таким образом, мгновенная мощность изменяется во времени с частотой, вдвое большей частоты тока или напряжения, и состоит из *средней (активной) составляющей*

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = UI \cos \varphi = UI_a = U_a I \quad (17.3)$$

и *переменной составляющей*

$$p_- = UI \cos [2(\omega t + \psi_u) - \varphi] = S \cos (2\omega t + \psi_u + \psi_i), \quad (17.4)$$

где $S = UI$.

Амплитуду переменной составляющей мгновенной мощности

$$S = U_m I_m / 2 = UI \quad (17.5)$$

называют *полной или кажущейся мощностью*.

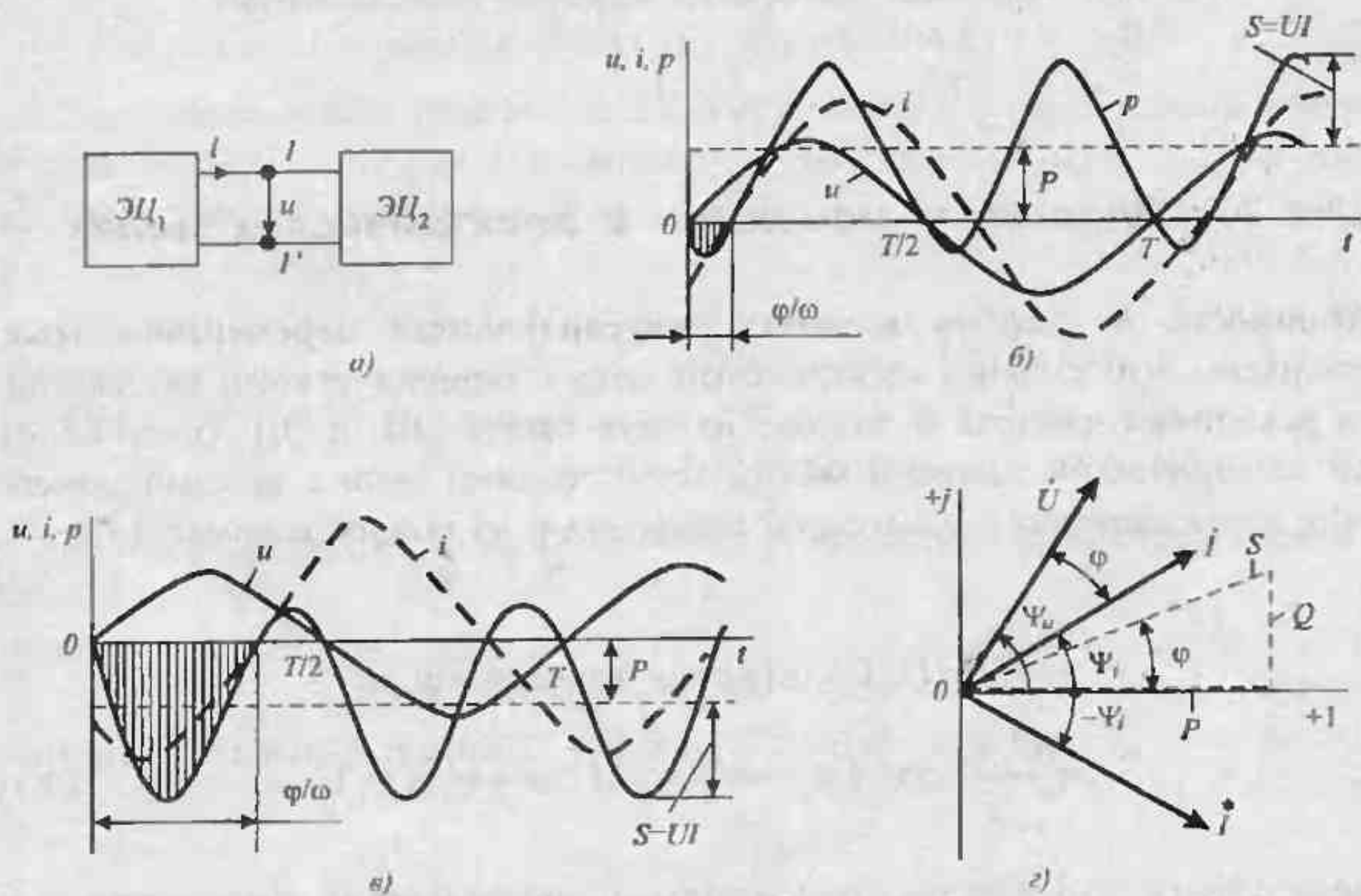


Рис. 17.1 Обмен энергией двухполюсников (а); мгновенная мощность при положительном (б) и отрицательном (в) значении средней мощности, векторная диаграмма токов и треугольник мощностей (г)

Средняя мощность P равна нулю при сдвиге фаз тока и напряжения $\varphi = \pi/2$, т. е. для чисто реактивной реакции цепи. При произвольной нагрузке она может быть больше или меньше нуля.

Энергия, передаваемая из первой части цепи ЭЦ₁ во вторую ЭЦ₂, равна

$$W(t) = \int_0^t p dt = \int_0^t (P + p_-) dt = Pt + \int_0^t p_- dt = W_1 + W_2. \quad (17.6)$$

Она состоит из линейно возрастающей во времени энергии $W_1 = Pt$ и переменной составляющей W_2 . Если $W(t) > 0$, то энергия передается из ЭЦ₁ в ЭЦ₂, если же $W(t) < 0$, то поток энергии изменяет свое направление и поступает из ЭЦ₂ в ЭЦ₁. Очевидно, что направление потока энергии зависит от знака средней мощности, которая при $0 < \varphi < \pi/2$ (рис. 17.1, б) положительна, а при $\pi/2 < \varphi < \pi$ (рис. 17.1, в) отрицательна.

При расчете мощности в цепях переменного тока пользуются понятием *коэффициента мощности*

$$k_M = \cos \varphi = P/S = UI_a/S = U_a I/S, \quad (17.7)$$

который характеризует реакцию цепи и равен единице при чисто активной нагрузке и меньше нуля при комплексной нагрузке. При реактивной нагрузке коэффициент мощности равен нулю.

По аналогии с активной (средней) мощностью при гармоническом токе пользуются понятием *реактивной мощности*

$$Q = UI \sin \varphi = UI_p = IU_p. \quad (17.8)$$

Приято считать, что реактивная мощность имеет положительное значение при отстающем от напряжения (т. е. при индуктивной нагрузке) и принимает отрицательное значение при опережающем токе (т. е. при емкостной нагрузке).

Так, например, реактивная мощность индуктивности L определяется при условии $\varphi = \pi/2$ и $x_L = \omega L$ и равна

$$Q_L = UI \sin \varphi = UI \sin(\pi/2) = UI = \omega LI_m^2/2 = \omega W_{Lm}. \quad (17.9)$$

где $W_{Lm} = LI_m^2/2$ — максимальная энергия, накапливаемая в магнитном поле индуктивности при $i = I_m$.

Аналогично, реактивная мощность емкости C определяется при условии, что $\varphi = -\pi/2$ и $b_C = \omega C$

$$Q_C = -UI = -U^2 b_C = -U^2 \omega C = -\omega CU_m^2/2 = -\omega W_{Cm}. \quad (17.10)$$

где $W_{Cm} = CU_m^2/2$ — максимальная энергия, накапливаемая в электрическом поле емкости при напряжении $u = U_m$.

Реактивная мощность в LC-цепи имеет значение

$$Q = Q_L + Q_C = \omega(W_{Lm} - W_{Cm}), \quad (17.11)$$

откуда следует, что она пропорциональна угловой частоте ω и разности максимальных энергий, накапливаемых в индуктивности и емкости.

Разные знаки реактивных мощностей Q_L и Q_C показывают, что в такой цепи один из элементов накапливает энергию, а другой — ее отдает. При этом в любой момент времени энергия, отдаваемая одним элементом, может быть равна энергии, накапливаемой другим элементом. Такой эффект наблюдается в резонансных цепях, которые рассматривались в лекции 14. При нарушении условий резонанса происходит преобладание одного вида реактивной энергии над другим.

Полную мощность S можно выразить через активную P и реактивную Q мощности, если использовать уравнения (17.3) и (17.8). При этом полную мощность можно записать в виде:

$$S = UI = I^2 z = U^2 y = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad (17.12)$$

где z и y — модули эквивалентных входных комплексных сопротивлений и проводимостей, соответственно.

Из уравнения (17.12) следует, что реактивную мощность можно определить по формуле

$$Q = \pm \sqrt{S^2 - P^2}, \quad (17.12a)$$

где знак плюс используется для характеристики индуктивной цепи, а знак минус — для емкостной цепи.

Треугольник мощностей, соответствующий уравнению (17.12a) изображен на рис. 17.1, з.

При расчете цепей по комплексным значениям напряжения и тока можно использовать значение комплексной полной (кажущейся) мощности

$$\dot{S} = \dot{U} \dot{I}, \quad (17.13)$$

где $\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$ — комплексное значение напряжения, а $\dot{I} = Ie^{-j\psi_i}$ — сопряженное комплексное значение тока.

Комплексное значение полной мощности состоит из двух частей: вещественной, равной средней мощности P и мнимой, равной реактивной мощности Q

$$\begin{aligned} \dot{S} = \dot{U} \dot{I} &= Ue^{j\psi_u} Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = UIe^{j\varphi} = \\ &= UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ = \sqrt{P^2 + Q^2} e^{j\varphi}. \end{aligned} \quad (17.14)$$

Нетрудно получить выражения для составляющих полной мощности через комплексные значения \dot{U}, \dot{I} и \dot{U}, \dot{I} :

$$P = \left(\dot{U} \dot{I} + \dot{U} \dot{I} \right) / 2, \quad Q = \left(\dot{U} \dot{I} - \dot{U} \dot{I} \right) / 2, \quad (17.15)$$

$$S = \dot{U} \dot{I} = U \dot{U} Y = U^2 Y \quad (17.16)$$

или

$$S = U I = I Z = I^2 Z, \quad (17.17)$$

где Z и Y — комплексные значения полного сопротивления и проводимости цепи, соответственно.

Из формул (17.16) и (17.17) можно найти комплексные значения входных сопротивления и проводимости цепи

$$Z = \frac{S}{I^2} = \frac{P}{I^2} + j \frac{Q}{I^2} = \frac{P}{I^2} + j \frac{\omega}{I^2} (W_{Lm} - W_{Cm}), \quad (17.18)$$

$$Y = \frac{S}{U^2} = \frac{P}{U^2} - j \frac{Q}{U^2} = \frac{P}{U^2} - j \frac{\omega}{U^2} (W_{Lm} - W_{Cm}). \quad (17.19)$$

Таким образом, если измерить полную и среднюю мощности, действующий ток I или действующее напряжение U , то можно рассчитать комплексное входное сопротивление или комплексную входную проводимость. При этом вещественная часть комплексного сопротивления или проводимости пропорциональна активной мощности P , а мнимая часть — пропорциональна реактивной мощности Q .

Заметим, что для оценки различных видов мощности используются различные единицы измерений. Так, мгновенная или средняя мощности измеряются в *ваттах* (*Вт*). Реактивная мощность измеряется в *вольт-амперах реактивных* (*вар*). А для оценки полной мощности используются *вольт-амперы* (*ВА*).

Мощность периодического негармонического тока. Среднюю мощность периодического негармонического тока можно определить, используя разложение периодических негармонических функций тока i и напряжения u в ряд Фурье, как описано в лекции 4:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u i dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \cos(k\omega_1 t - \psi_{uk}) \right] \times \\
 &\quad \times \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \cos(k\omega t - \psi_{ik}) \right] dt = \\
 &= U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{mk} I_{mk}}{2} \cos(\psi_{uk} - \psi_{ik}) = \\
 &= U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k, \tag{17.20}
 \end{aligned}$$

где $\varphi_k = \psi_{uk} - \psi_{ik}$ — фазовый сдвиг между k -ми гармониками напряжения и тока;

$P_0 = U_0 I_0$ — мощность постоянного тока;

$P_k = U_k I_k \cos \varphi_k$ — средняя мощность k -ой гармоники тока.

Из формулы (17.20) следует, что *средняя мощность негармонического непериодического тока равна сумме средних мощностей, создаваемых отдельными гармоническими составляющими тока и напряжения*. Таким образом, для каждой из гармоник тока i_k средняя мощность может быть отлична от нуля только при наличии соответствующей гармоники напряжения u_k .

Для несинусоидального периодического тока можно по аналогии с гармоническим током пользоваться понятиями реактивной и полной мощностей.

При этом полная мощность несинусоидального периодического тока определяется по формуле

$$S = UI, \tag{17.21}$$

где $U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}$ — действующее значение несинусоидального напряжения,

$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}$ — действующее значение несинусоидального тока.

Такое определение полной мощности несинусоидального тока по существу сводится к замене несинусоидального тока эквивалентным по мощности синусоидальным током. При этом можно говорить об эквивалентном коэффициенте мощности, определяя это так же, как для гармонического тока

$$k_M = \frac{P}{S} \cos \varphi_1, \quad (17.22)$$

где φ_1 — угол сдвига фаз эквивалентного синусоидального тока.

Аналогично, можно ввести понятие реактивной мощности несинусоидального тока, определяя его по формуле

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k. \quad (17.23)$$

Однако, в отличие от синусоидального тока, для которого справедливо уравнение (17.12), для несинусоидального тока оно практически не выполняется.

При этом обычно квадрат полной мощности больше суммы квадратов активной и реактивной мощностей. Для оценки этого отличия обычно пользуются понятием мощности искажений

$$D = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}. \quad (17.24)$$

Отношение мощности искажений (17.24) к полной мощности (17.21) называют *коэффициентом искажений*

$$k_D = \frac{D}{S}. \quad (17.25)$$

Отличие этого коэффициента от нуля косвенно характеризует отклонение формы тока от формы напряжения.

Согласование генератора с нагрузкой на переменном токе. Критериями согласования генератора с нагрузкой могут быть различные величины: КПД генератора; максимальная средняя мощность, поступающая в нагрузку и др.

В дальнейшем будем считать нагрузку согласованной с генератором, если в ней выделяется максимальная средняя мощность. Такое согласование не связано с максимальным КПД генератора, однако при этом обеспечивается передача в нагрузку максимально возможной мощности.

Схема включения генератора и нагрузки показана на рис. 17.2,а. В этой схеме генератор представлен источником напряжения E с внутренним сопротивлением $Z_1 = r_1 + jx_1$, а нагрузка — комплексным сопротивлением $Z_n = r_n + jx_n$.

Средняя мощность, поступающая в нагрузку, в соответствии с формулой (17.3) определяется выражением

$$P = U_n I \cos \varphi = I^2 r_n, \quad (17.21)$$

где ток в цепи можно рассчитать по формуле

$$I = \frac{E}{\sqrt{(r_1 + r_n)^2 + (x_1 + x_n)^2}} \quad (17.22)$$

После подстановки значения тока (17.22) в формулу (17.21), получим:

$$P = \frac{E^2 r_n}{\sqrt{(r_1 + r_n)^2 + (x_1 + x_n)^2}}. \quad (17.23)$$

Очевидно, что максимальная мощность будет поступать в нагрузку при выполнении двух условий

$$\frac{\partial P}{\partial x_n} = 0 \text{ и } \frac{\partial P}{\partial r_n} = 0. \quad (17.24)$$

Первое условие (17.24) выполняется, если $(x_1 + x_n) = 0$, откуда получаем, что $x_1 = -x_n$. Второе условие (17.24) выполняется, если $r_1 = r_n$. Таким образом, для выполнения двух условий (17.24) необходимо, чтобы комплексное сопротивление источника Z_1 равнялось комплексно сопряженному сопротивлению нагрузки Z_n , т.е.

$$Z_1 = \dot{Z}_n. \quad (17.25)$$

При этом генератор отдает в нагрузку мощность, равную

$$P_i = E^2 / (4r_1) = P_0, \quad (17.25a)$$

называемую *располагаемой мощностью генератора*.

При выполнении условия (17.25) КПД генератора

$$\eta = P_n / (P_i + P_n) = 1 / (1 + r_1 / r_n) \quad (17.26)$$

составляет всего 50%, так как в нагрузку поступает только половина мощности, отдаваемой генератором.

График зависимости кпд генератора при изменении отношения r_n/r_l приведен на рис. 17.2, б. Из этого графика следует, что максимальное значение кпд генератора будет в режиме холостого хода, т.е. при $r_n \rightarrow \infty$, однако мощность, выделяемая в нагрузке, при этом будет равна нулю. Аналогичные выводы могут быть сделаны и при подключении нагрузки к генератору тока.

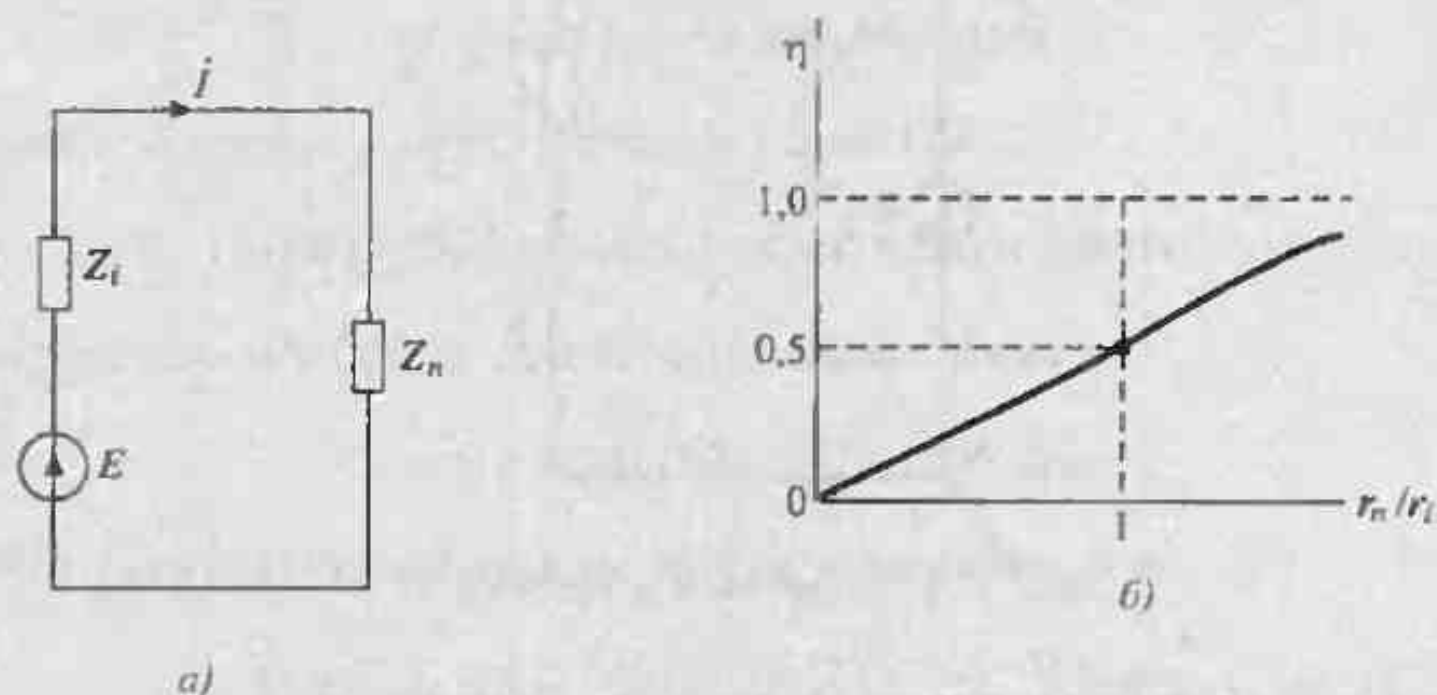


Рис. 17.2. Включение генератора и нагрузки (а), зависимость кпд от отношения r_n/r_l (б)

Энергия и мощность при непериодических напряжениях и токах.

Как было показано в лекции 5, любое непериодическое воздействие может характеризоваться спектральной плотностью его комплексных амплитуд. При этом энергия любого аperiodического сигнала может быть определена по формуле Релея*

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)i(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_u(j\omega)F_i(j\omega)d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_u(j\omega)F_i(j\omega)d\omega, \quad (17.27)$$

где $F_u(j\omega)$ и $F_i(j\omega)$ — спектральные плотности напряжения и тока.

С помощью формулы (17.27) можно определить энергию импульсного сигнала, но не его мощность, так как для этого потребовалось бы усреднить энергию сигнала за время $T \rightarrow \infty$. Иначе говоря, средняя мощность импульсных непериодических сигналов равна нулю. В связи с этим при оценке мощности непериодических сигналов пользуются понятием *импульсной мощности*, для которой усреднение энергии производится только за время действия импульса T_n .

$$P_n = W/T_n \quad (17.28)$$

* Джон Уильям Стретт (1842–1919) — английский физик, получивший за научные труды титул лорда Релея. Известен своими трудами в области колебаний и волн.

Пример 17.1. Требуется определить активную, реактивную и полную мощности в цепи, изображенной на рис. 17.3, если параметры элементов имеют следующие значения: $U_{m1} = 141\text{В}$, $r = 3\text{ Ом}$, $x_{L1} = 4\text{ Ом}$.

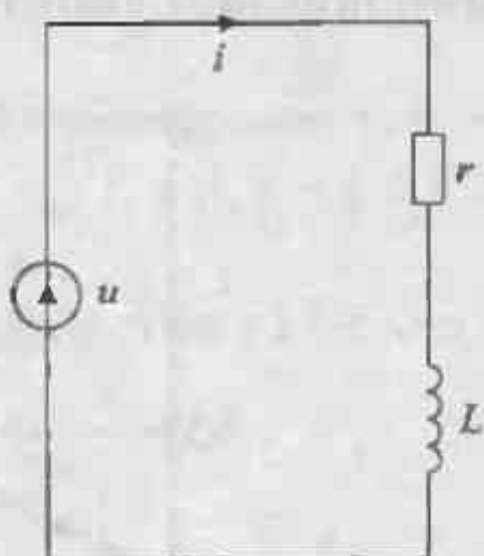


Рис. 17.3. Схема цепи к примеру 17.1

Решение. Определим действующее значение напряжения

$$U_1 = U_{m1} / \sqrt{2} = 100\text{В}.$$

Найдем полное сопротивление цепи

$$z_1 = \sqrt{r^2 + x_{L1}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{ Ом}.$$

Определим действующее значение тока в цепи

$$I_1 = U_1 / z_1 = 100 / 5 = 20\text{А}.$$

По формуле (17.3) вычислим среднюю мощность, потребляемую цепью

$$P_1 = I_1^2 r = 20^2 \cdot 3 = 1200\text{Вт}.$$

По формуле (17.9) вычислим реактивную мощность индуктивности

$$Q_1 = I_1^2 x_{L1} = 20^2 \cdot 4 = 1600\text{вар}.$$

Пользуясь формулой (17.5), найдем полную мощность цепи

$$S_1 = U_1 I_1 = 100 \cdot 20 = 2000\text{Вт}.$$

Проверить этот результат можно по формуле (17.12)

$$S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = \sqrt{1200^2 + 1600^2} = 2000\text{Вт}.$$

Пример 17.2. При условиях предыдущего примера требуется определить мощность искажений, если кроме первой гармоники приложенное к цепи напряжение содержит вторую гармонику с действующим значением, равным $U_2 = 85,4\text{ В}$.

Решение. Определим полное сопротивление цепи для второй гармоники тока

$$z_2 = \sqrt{r^2 + (2x_{L1})^2} = \sqrt{3^2 + 8^2} = 8,54 \text{ Ом.}$$

Найдем ток, создаваемый второй гармоникой напряжения

$$I_2 = U_2 / z_2 = 85,4 / 8,54 = 10 \text{ А.}$$

Определим среднюю мощность второй гармоники

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2 = 85,4 \cdot 10 (3/8,54) = 300 \text{ Вт.}$$

Найдем среднюю мощность несинусоидального тока

$$P = P_1 + P_2 = 1200 + 300 = 1500 \text{ Вт.}$$

Определим реактивную мощность второй гармоники тока

$$Q_2 = U_2 I_2 \sin \varphi_2 = 85,4 \cdot 10 (8/8,54) = 800 \text{ вар.}$$

Найдем реактивную мощность несинусоидального тока

$$Q = Q_1 + Q_2 = 1600 + 800 = 2400 \text{ вар.}$$

Определим действующее значение несинусоидального напряжения

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = \sqrt{100^2 + 85,4^2} = 131 \text{ В.}$$

Вычислим действующее значение несинусоидального тока

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} = \sqrt{500} = 22,4 \text{ А.}$$

Найдем полную мощность несинусоидального тока

$$S = UI = 131 \cdot 22,4 = 2934 \text{ ВА.}$$

Вычислим мощность искажений по формуле (17.24)

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)} = \sqrt{2934^2 - (1500^2 + 2400^2)} = \\ &= \sqrt{8,64 - 8,01} \cdot 10^3 = 773 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Лекция 18. Расчет переходных процессов по мгновенным значениям

Нестационарные процессы в электрических цепях возникают при их коммутации или при подаче непериодических (нестационарных) сигналов. В результате таких воздействий на электрическую цепь в ней на некоторое время устанавливается особый режим, при котором цепь переходит из некоторого начального стационарного состояния в другое конечное стационарное состояние. Этот переход цепи из одного состояния в другое называют переходным процессом, так как он связывает между собой два стационарных состояния — начальное и конечное.

Задача анализа электрических цепей в переходном режиме обычно сводится к определению реакции $y(t)$, представляющей собой ток или напряжение в какой-либо ветви, на некоторое возмущающее воздействие $x(t)$. Расчет электромагнитных процессов связан с решением дифференциального уравнения, которое составляют на основе законов Кирхгофа и уравнений элементов цепи.

В общем случае процессы в цепи характеризуются системой интегриродифференциальных уравнений, которые могут быть приведены путем последовательного исключения переменных к одному дифференциальному уравнению n -го порядка. Общий интеграл этого дифференциального уравнения представляет собой искомую реакцию.

Рассмотрим электромагнитные процессы в пассивной цепи, возникающие при включении возмущающего воздействия $x(t) = e(t) = E$, на примере расчета схемы, представленной на рис. 18.1, а. При замыкании ключа K в этой цепи начинается процесс зарядки конденсатора, который может быть предварительно заряжен до напряжения $u_c(0)$. Очевидно, что ток зарядки конденсатора $i_c = C du_c/dt$ проходит в течение некоторого интервала времени $0 \leq t \leq t_{\text{пр}}$, на протяжении которого напряжение u_c изменяется. Когда u_c достигнет некоторого постоянного установившегося значения $u_{c\text{в}}$, то ток $i_c = 0$ (рис. 18.1, б).

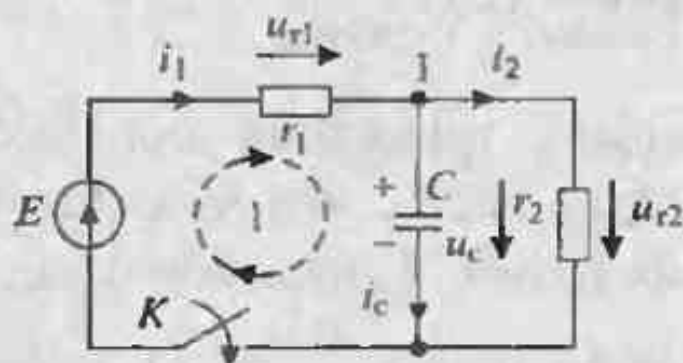
Выберем в качестве реакции (искомой переменной) напряжение в конденсаторе $y(t) = u_c$. Уравнение цепи относительно искомой переменной составляют на основе законов Кирхгофа для контура I и узла I

$$E = u_{r1} + u_C; i_1 = i_C + i_2$$

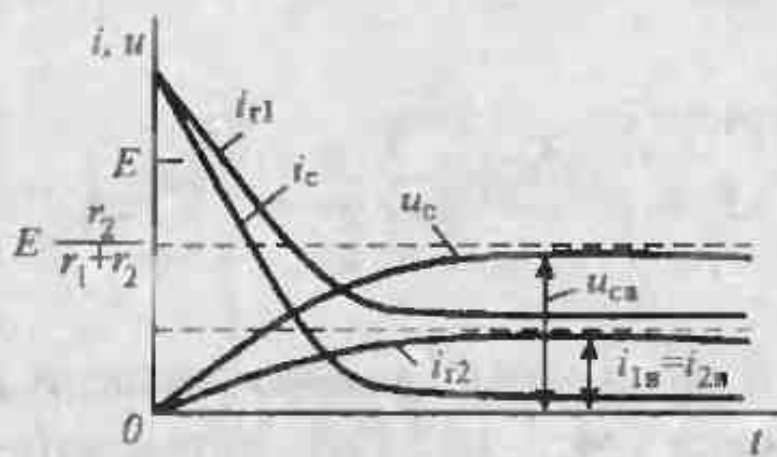
и уравнений напряжений и токов в элементах

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}, u_C = u_{r2} = r_2 i_2,$$

$$u_{r1} = r_1 i_1 = r_1 (i_C + i_2) = r_1 \left(C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{r_2} \right).$$



а)



б)

Рис. 18.1. Схема RC-цепи (а); графики напряжений и токов в ней (б)

Резльтирующее дифференциальное уравнение цепи имсет вид

$$u_C + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} C \frac{du_C}{dt} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} E. \quad (18.1)$$

Полученное уравнение для цепи с одним инерционным элементом C является неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Коэффициенты при искомой переменной u_C и ее производных, а также при возмущении E зависят от параметров r_1, r_2, C . Если эти параметры элементов постоянны и цепь линейна, то уравнение (18.1) также линейно. Если же какой-либо

параметр является функцией напряжения или тока, например $r_1(i_1)$ или $C(u_C)$, то (18.1) будет нелинейным.

Решение линейного дифференциального уравнения может быть представлено в виде двух составляющих:

□ общего интеграла однородного дифференциального уравнения — свободной составляющей $u_{C_{св}} = Ae^{st}$, где A — произвольная постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий; $s = -1/\tau_C$ — корень характеристического уравнения $1 + \tau_C s = 0$, соответствующего дифференциальному уравнению (18.1), $\tau_C = r_1 r_2 C / (r_1 + r_2)$ — постоянная времени;

□ частного решения неоднородного дифференциального уравнения — вынужденной составляющей $u_{C_{в}}$, которую удобно определять как реакцию при $t \rightarrow \infty$ в установившемся режиме.

Корни характеристического уравнения для пассивной цепи всегда имеют отрицательную вещественную часть, что указывает на затухающий характер свободной составляющей реакции. Таким образом,

$$y(t) = u_C = u_{C_{св}} + u_{C_{в}} = Ae^{-t/\tau_C} + u_{C_{в}}. \quad (18.2)$$

Ток в конденсаторе i_C при $u_{C_{св}} = \text{const}$ и $du_{C_{св}}/dt = 0$ имеет значение

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{A}{\tau_C} e^{-t/\tau_C} = i_{C_{св}}. \quad (18.3)$$

При $t > (3 + 5) \tau_C$ ток i_C практически равен нулю и изменение напряжения на конденсаторе прекращается (рис. 18.1, б). Установившееся значение напряжения на конденсаторе в конце переходного процесса определяют из (18.1), полагая, что при $t \rightarrow \infty$ $u_C = u_{C_{в}}$ и $du_C/dt = 0$:

$$u_{C_{в}} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} E = \text{const}. \quad (18.4)$$

Начальные условия в цепи определяют с помощью законов коммутации, которые основаны на недопустимости мгновенного изменения запасов энергии в полях инерционных элементов L , C при ограниченной мощности источников электрической энергии.

Так как напряжение на емкости $u_C(0_-)$ до замыкания ключа не изменяется сразу после замыкания ключа, то

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_C(0). \quad (18.5)$$

Произвольную постоянную определим из уравнения (18.2), которое для момента времени $t = 0$ должно быть записано так:

$$u_C(0) = A + u_{C_0} = A + \frac{r_2}{r_1 + r_2} E,$$

откуда $A = u_C(0) - r_2 E / (r_1 + r_2) = u_C(0) - u_{C_0}$.

Подставляя значение A в (18.2), получим

$$u_C = u_{C_0} + u_{C_0} = u_C(0)e^{-t/\tau_C} + u_{C_0}(1 - e^{-t/\tau_C}), \quad (18.6)$$

Если $u_C(0) = 0$, а $i_{C_0} = 0$, то

$$u_C = \frac{r_2 E}{r_1 + r_2} (1 - e^{-t/\tau_C}); \quad i_C = i_{C_0} = \frac{E}{r_1} e^{-t/\tau_C}. \quad (18.6, a)$$

Токи в сопротивлениях r_2 и r_1 имеют значения

$$i_2 = \frac{u_C}{r_2} = \frac{E}{r_1 + r_2} (1 - e^{-t/\tau_C}),$$

$$i_1 = i_C + i_2 = \frac{E}{r_1 + r_2} \left(1 + \frac{r_2}{r_1} e^{-t/\tau_C} \right).$$

Временные диаграммы переменных u_C , i_1 , i_2 , i_C приведены на рис. 18.1, б.

Процессы в цепи усложняются с ростом числа реактивных элементов в схеме. Так, переходные процессы в rLC -контуре при разрядке конденсатора, предварительно заряженного до напряжения $u_C(0)$ (рис. 18.2, а), характеризуются уравнением Кирхгофа

$$u_L + u_r + u_C = 0 \text{ или } L \frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C} \int i dt = 0,$$

которое при подстановке $i = i_C = C(du_C/dt)$ преобразуется в однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + rC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0. \quad (18.7)$$

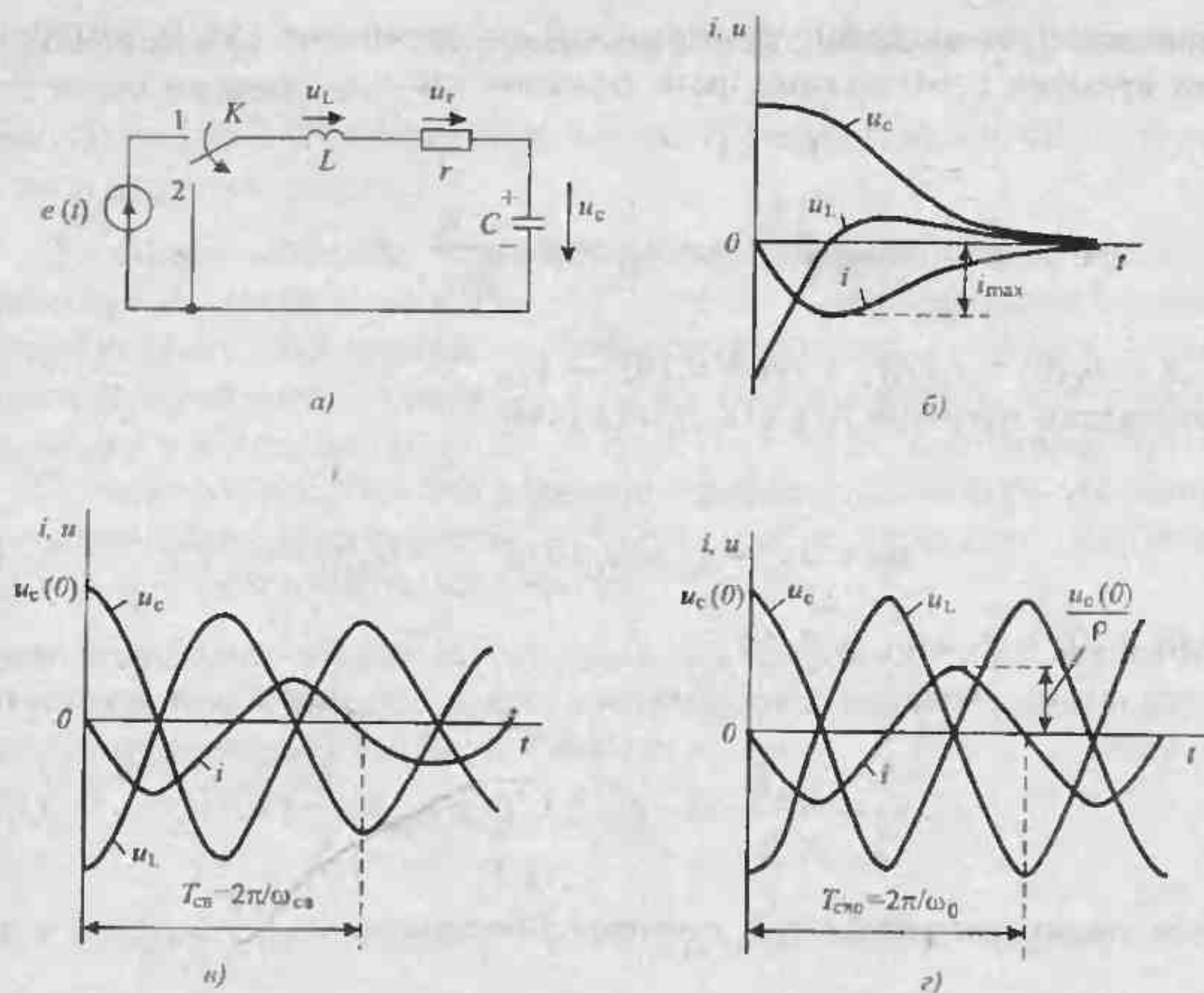


Рис. 18.2. Схема LC-цепи (а); графики напряжений и тока в ней при апериодическом (б), затухающем колебательном (в) и незатухающем колебательном (z) режимах

Решение (18.7), если учесть, что вынужденная составляющая $u_{св} = 0$, можно записать в виде

$$u_c = u_{св} + u_{сст} = u_{сст} = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}. \quad (18.8)$$

Скорость изменения напряжения на конденсаторе

$$du_c / dt = s_1 A_1 e^{s_1 t} + s_2 A_2 e^{s_2 t}. \quad (18.9)$$

Постоянные интегрирования A_1 и A_2 определяют из начальных условий, отражающих сохранение начальных запасов энергии в конденсаторе $W_C = C u_c^2(0)/2$ и катушке $W_L = L i_c^2(0)/2$. До переключения ключа $u_c(0_-) = u_c(0)$ и ток в контуре отсутствовал, следовательно,

$$i_L(0_-) = i(0) = C \frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0} = 0.$$

Записав (18.8) и (18.9) для момента времени $t = 0$ с учетом начальных условий, получим систему уравнений для определения постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= u_C(0), \\ s_1 A_1 + s_2 A_2 &= \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{C} i(0) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$A_1 = \frac{-s_2 u_C(0)}{s_1 - s_2}, \quad A_2 = \frac{s_1 u_C(0)}{s_1 - s_2}.$$

Подставляя значения постоянных A_1 и A_2 в (18.8) и (18.9), найдем выражения реакций:

$$u_C = u_C(0) \left[\frac{-s_2}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} + \frac{s_1}{s_1 - s_2} e^{s_2 t} \right], \quad (18.10)$$

$$i_C = i = C \frac{du_C}{dt} = -u_C(0) \frac{s_1 s_2 C}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}). \quad (18.11)$$

Характеристическое уравнение $LCs^2 + Crs + 1 = 0$, соответствующее (18.7), имеет корни

$$s_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (18.12)$$

где $\delta = r/(2L)$ — показатель затухания колебаний в контуре; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — угловая частота незатухающих колебаний.

В зависимости от параметров цепи корни характеристического уравнения могут быть: вещественными, отрицательными и различными; вещественными, отрицательными и кратными; комплексно-сопряженными с отрицательными вещественными частями. Этим трем случаям соответствуют три режима, которые могут возникнуть в контуре.

Выражения реакций в различных режимах могут быть получены преобразованием уравнений (18.10), (18.11) с подстановкой соответствующих значений корней s_1 и s_2 .

В апериодическом режиме при $\delta = r/(2L) > \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

$$s_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2},$$

$$u_C = u_{C_{\text{а}}} = \frac{u_C(0)}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (s_1 e^{s_1 t} + s_2 e^{s_2 t}),$$

$$i = i_{C_{\text{а}}} = \frac{u_C(0)}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{s_1 t} + e^{s_2 t}).$$

Графики напряжений и тока в апериодическом режиме показаны на рис. 18.2, б
В критическом режиме при $\delta = \omega_0$ и $s_1 = s_2 = -\delta$

$$u_C = u_{C_{\text{св}}} = u_C(0)(1 + \delta t)e^{-\delta t},$$

$$i = i_{C_{\text{св}}} = \frac{u_C(0)}{L} t e^{-\delta t}.$$

В колебательном режиме при $\delta < \omega_0$ и

$$s_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega_{\text{св}}$$

$$u_C = u_{C_{\text{а}}} = u_C(0)e^{-\delta t} \left(\cos \omega_{\text{св}} t + \frac{\delta}{\omega_{\text{св}}} \sin \omega_{\text{св}} t \right),$$

$$i = i_{C_{\text{а}}} = \frac{u_C(0)\omega_0}{\rho\omega_{\text{св}}} e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{св}} t = \frac{-u_C(0)e^{-\delta t}}{\rho\sqrt{1-D^2}} \sin \omega_0 \sqrt{1-D^2} t,$$

где $\omega_{\text{св}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — угловая частота затухающих свободных колебаний в контуре;

$\rho = \sqrt{L/C}$ — характеристическое сопротивление контура;

$D = r/(2\rho)$ — приведенный коэффициент затухания.

Графики напряжений и тока в колебательном режиме приведены на рис. 18.2, в.

Таким образом, в цепи с двумя видами накопителей энергии L и C при $D < 1$ возможно появление колебательного процесса, при котором происходит периодический обмен энергией между конденсатором и катушкой. После нескольких затухающих колебаний вследствие потерь в резисторе r электромагнитная энергия превращается в теплоту и процесс заканчивается (рис. 18.2, в). В идеальной цепи без потерь установятся незатухающие гармонические колебания с частотой $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, которую называют *собственной частотой* незатухающих колебаний контура (рис. 18.2, з).

Рассмотренные примеры показывают, что при приложении некоторого возмущающего воздействия в цепи возникает переходный процесс, связанный с изменением запасов энергии в ее инерционных элементах. В течение переходного процесса реакцию цепи можно рассматривать как сумму вынужденной, соответствующей $i \rightarrow \infty$, и свободной составляющих:

$$y(t) = y_{\text{св}}(t) + y_{\text{в}}(t) = y_{\text{св}}(t) + y(\infty). \quad (18.13)$$

Свободная составляющая в пассивных цепях, содержащих резисторы, со временем затухает и при $t = t_{\text{пр}}$ настолько мала, что ею можно пренебречь. Время переходного процесса $t_{\text{пр}}$ зависит от интенсивности рассеяния энергии, определяется параметрами и структурой цепи. Очевидно, что в резистивной цепи, характеризуемой алгебраическим уравнением равновесия, переходный процесс отсутствует и $t_{\text{пр}} = 0$.

Свободная составляющая $y_{\text{св}}(t)$ зависит от начальных и конечных запасов энергии в реактивных элементах цепи, от ее элементного состава и конфигурации. Она не зависит от вида возмущения, так как представляет собой общий интеграл однородного дифференциального уравнения цепи, правая часть которого равна нулю.

Вынужденная составляющая реакции $y_{\text{в}}(t)$ для постоянных, гармонических и экспоненциальных возмущений определяется как реакция цепи в установившемся режиме, который практически достигается при $t \geq t_{\text{пр}}$, а теоретически при $t \rightarrow \infty$. Ее вид совпадает с видом возмущающего воздействия, а значение зависит от параметров и конфигурации цепи. Составляющая $y_{\text{в}}(t)$ не зависит от начальных запасов энергии в инерционных элементах цепи, которые не оказывают влияния на установившийся режим. Это означает, что в цепи с источниками постоянных напряжений и токов в установившемся режиме могут проходить только постоянные токи (в том числе нулевые), а в цепях с источниками гармонических возмущений — только гармонические.

Порядок дифференциального уравнения равновесия цепи зависит от числа реактивных элементов и их размещения в цепи. В общем случае электромагнитные процессы в электрической цепи характеризуются неоднородным дифференциальным уравнением n -го порядка

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \\ = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \end{aligned} \quad (18.14)$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, b_{m-1}, \dots, b_0$ — коэффициенты левой и правой частей уравнения, зависящие от элементного состава и конфигурации цепи.

Если в цепи присутствует несколько источников, то правая часть уравнения (18.14) представляет собой сумму, взятую по всем возмущающим воздействиям.

Для нелинейных цепей один или несколько коэффициентов уравнения зависят от реакции или входного возмущения:

$$a_i = a_i \left(y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n} \right); \quad b_j = b_j \left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^m x}{dt^m} \right). \quad (18.15)$$

Аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения может быть получено лишь для весьма ограниченного круга электротехнических задач. Поэтому расчет нелинейных цепей приходится делать графическим методом или численным интегрированием с помощью ЭВМ. В большинстве практических случаев, когда рассматривается ограниченный диапазон возмущений и возможно использование линейных или кусочно-линейных моделей электронных или оптоэлектронных устройств, задача может быть сведена к анализу линейных цепей, характеризуемых уравнением (18.14) с постоянными коэффициентами.

Линейное дифференциальное уравнение всегда имеет аналитическое решение, и его свободная составляющая в общем случае имеет вид

$$y_{св}(t) = A_1 e^{s_1 t} + \dots + (A_{m_1} + A_{m_2} t + \dots + A_{m_{m_1}} t^{m_1-1}) e^{s_{m_1} t} + A_{m_{m_1}} e^{s_{m_1} - m_{m_1} t}, \quad (18.16)$$

где $A_1, \dots, A_{m_1}, \dots, A_{m_{m_1}}, A_{m_{m_1}}$ — произвольные постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий;

$s_1, s_2, \dots, s_{m_1}, \dots, s_{m_{m_1}}$ — корни характеристического уравнения, среди которых имеется корень s_{m_1} кратности m_{m_1} .

Если кратные корни отсутствуют, то

$$y_{св}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{s_k t}. \quad (18.17)$$

Характеристическое уравнение пассивной цепи

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (18.18)$$

может иметь вещественные отрицательные или попарно комплексно-сопряженные с отрицательными вещественными частями корни.

Активные цепи содержат управляемые и внешние источники питания, которые остаются включенными и при прекращении входных сигналов в цепи. Поэтому свободная составляющая реакции активных цепей может оказаться расходящейся, возрастающей во времени благодаря энергии, поставляемой внешними источниками питания. При этом среди корней характеристического уравнения такой цепи появляются корни с положительными вещественными частями. При любом входном сигнале в этом случае возникают расходящиеся по амплитуде колебания, которые затем ограничиваются нелинейностями цепи.

Многие задачи проектирования оптоэлектронных устройств сводятся к расчету установившихся режимов в эквивалентных цепях, что позволяет отказаться от решения дифференциальных уравнений, заменив его решением системы алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами при постоянных возмущениях и с комплексными коэффициентами при гармонических возмущениях.

Для всех линейных систем, в которых существуют линейные соотношения между возмущением $x(t)$ и реакцией $y(t)$, справедлив принцип наложения, устанавливающий, что результирующая реакция линейной системы на сумму возмущений

$$x(t) = \sum_{k=1}^m c_k x_k(t), c_k = \text{const}$$

представляет собой сумму составляющих реакций $c_k y_k(t)$ на каждое из элементарных возмущений (рис. 18.3, а), т. е.

$$y(t) = \sum_{k=1}^m c_k y_k(t). \quad (18.19)$$

Этот принцип уже использовался при классическом способе решения дифференциального уравнения, когда реакция представлялась в виде двух составляющих (18.13). Его удобно применять при сложных возмущающих воздействиях, которые раскладывают на элементарные составляющие, например ступенчатой формы (рис. 18.3, б, в) или гармонические. При этом составляющие реакции от каждого элементарного возмущения $y_1(t)$ рассчитывают стандартными методами, а затем их суммируют и получают результирующую реакцию на сложное возмущение (рис. 18.3, б, в, г).

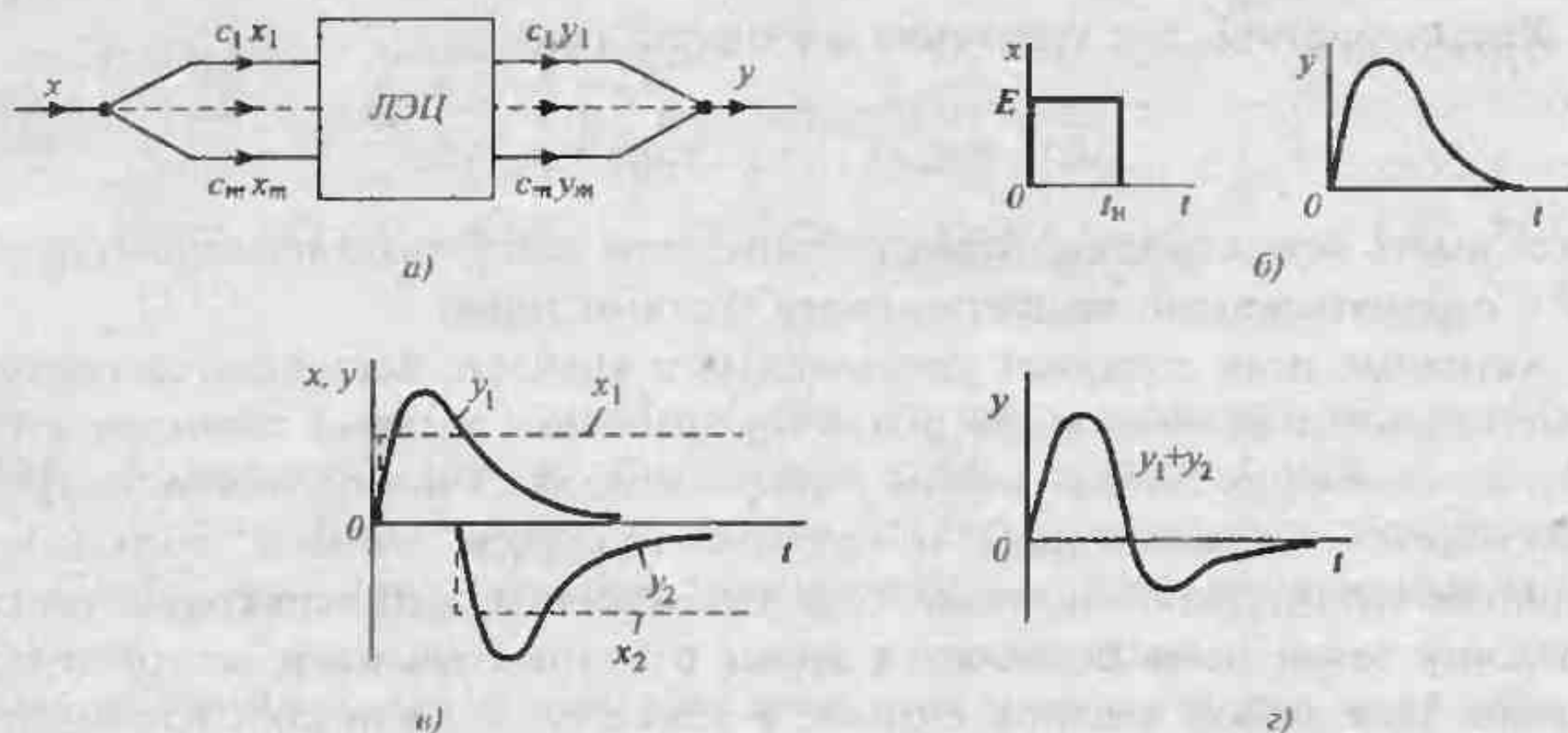


Рис. 18.3. Прохождение сложного сигнала через линейную цепь (а), формы сигналов (б), их разложение на составляющие (в) и результирующая реакция (г)

На этом принципе основан метод расчета переходных процессов по мгновенным значениям при воздействиях сложной формы с помощью **интеграла наложения (интеграла Дюамеля)**. В соответствии с этим методом внешнее воздействие сложной формы $x(t)$ представляют в виде суммы ступенчатых функций $dx(\tau)$, смещенных на интервал времени $kd\tau = \tau$, как показано на рис. 18.4.

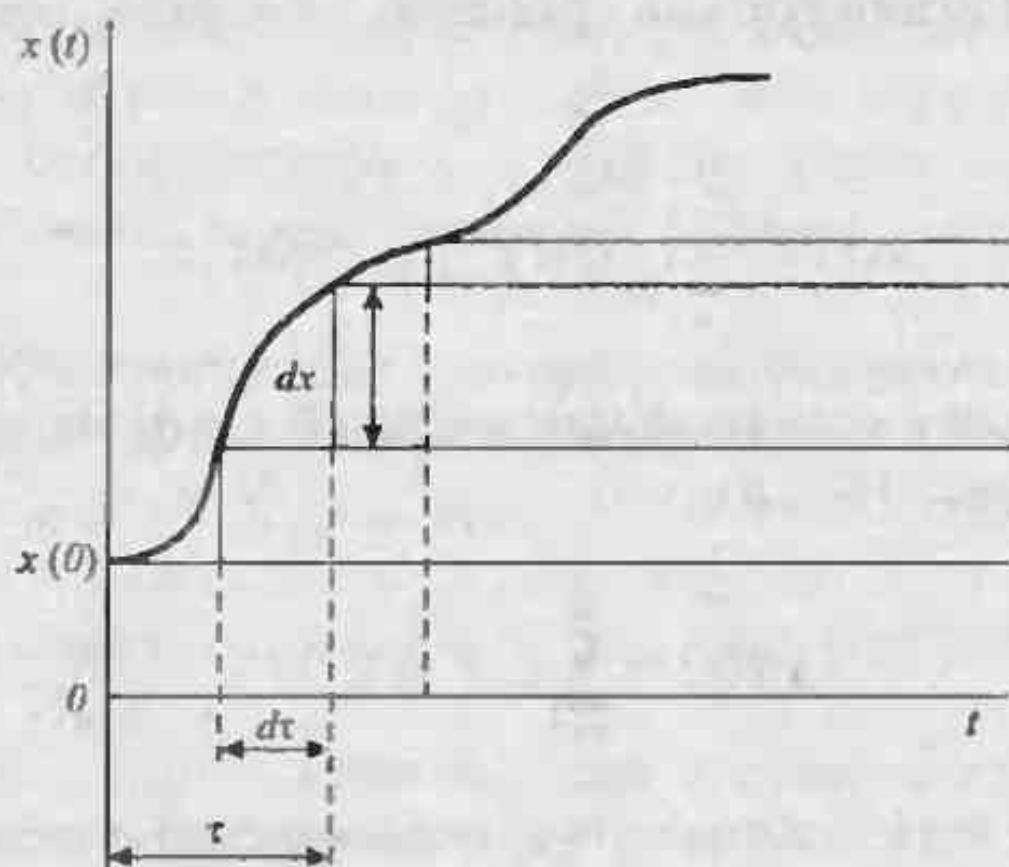


Рис. 18.4. Разложение сложного сигнала на ступенчатые функции

Реакцию цепи на единичную функцию $\delta_1(t)$ называют переходной функцией этой цепи и обозначают $h_1(t)$. Если известна переходная функция цепи $h_1(t)$, то для нахождения реакции цепи на произвольное воздействие можно поступить следующим образом.

Представим, что воздействие $x(t)$ состоит из суммы запаздывающих на время τ бесконечно малых ступенек высотой $dx(\tau) = x(\tau)d\tau \delta_1(t-\tau)$, где $\delta_1(t-\tau)$ — единичная запаздывающая функция. Для получения воздействия эти элементарные ступеньки нужно проинтегрировать от нуля до текущего времени t , поэтому

$$x(t) = \int_0^t dx(\tau) = \int_0^t x'(\tau)\delta_1(t-\tau)d\tau. \quad (18.20)$$

Элементарная реакция цепи на каждую отдельную ступеньку $dx(\tau)$ определяется переходной запаздывающей функцией $h_1(t-\tau)$, поэтому:

$$dy = x'(\tau)h_1(t-\tau)d\tau. \quad (18.21)$$

Чтобы получить полную реакцию цепи, выражение (18.21) нужно проинтегрировать от нуля до значения текущего времени t

$$y = \int_0^t x'(\tau)h_1(t-\tau)d\tau. \quad (18.22)$$

Кроме того, если учесть начальный скачок функции $x(t)$ при $t = 0$, то формула (18.22) примет окончательный вид:

$$y = x(0)h_1(t) + \int_0^t x'(\tau)h_1(t-\tau)d\tau, \quad (18.23)$$

который называют интегралом Дюамеля.

При расчете цепей используется также свойство неизменяемости взаимных отношений возмущения и реакции при их дифференцировании и интегрировании (рис. 18.5, а, б). Например, если известна реакция $y_1(t)$ на возмущение $x_1(t)$ (рис. 18.5, а), то при подаче на вход этой цепи некоторого возмущения $x(t) = dx_1/dt$ для определения реакции достаточно продифференцировать известную реакцию $y_1(t)$ (рис. 18.5, б).

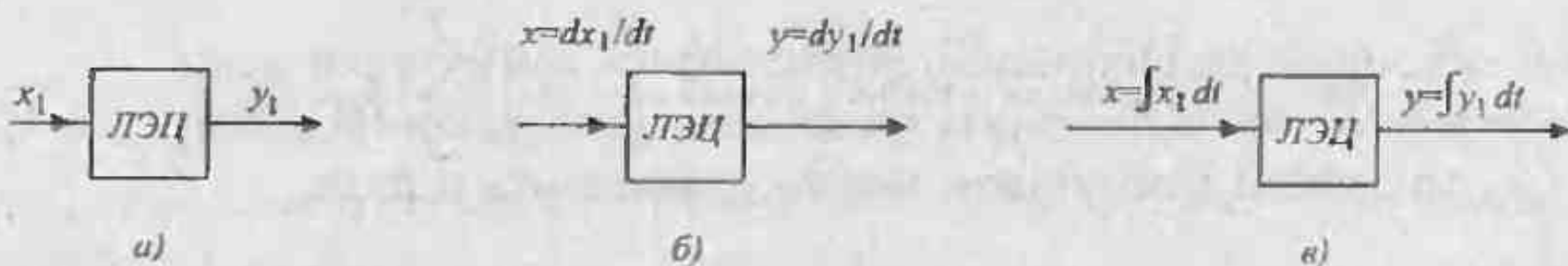


Рис. 18. 5. Прохождение через линейную электрическую цепь (ЛЭЦ) сигнала (а), его производной (б) и интеграла (в)

Рассмотрим, наконец, способы определения постоянных интегрирования A_k , входящих в (18.16) и (18.17). Для определения постоянных интегрирования используют начальные условия в электрической цепи, обусловленные законами коммутации, которые являются следствиями законов сохранения энергии.

Электромагнитная энергия в цепи, содержащей конденсаторы и индуктивные катушки,

$$W_{эв} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (q_k u_{ck} + i_{Lk} \Psi_k), \quad (18.24)$$

где q_k, u_{ck} — заряд и напряжение конденсатора соответственно;
 i_{Lk}, Ψ_k — ток и магнитное потокосцепление индуктивной катушки соответственно;

k — порядковый номер ветви.

При любых изменениях в электрической цепи, связанных с коммутацией, энергия конденсаторов и индуктивных катушек не может измениться мгновенно и, следовательно, для любого момента времени должны выполняться равенства

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n q_k(0_-) u_{ck}(0_-) = \sum_{k=1}^n q_k(0_+) u_{ck}(0_+), \\ \sum_{k=1}^n \Psi_k(0_-) i_{Lk}(0_-) = \sum_{k=1}^n \Psi_k(0_+) i_{Lk}(0_+), \end{cases} \quad (18.25)$$

где $q_k(0_-), u_{ck}(0_-)$ — заряд и напряжение на конденсаторе до коммутации;
 $q_k(0_+), u_{ck}(0_+)$ — заряд и напряжение на конденсаторе после коммутации;
 $i_{Lk}(0_-), \Psi_k(0_-)$ — ток и потокосцепление в катушке перед коммутацией;
 $i_{Lk}(0_+), \Psi_k(0_+)$ — ток и потокосцепление в катушке после коммутации.

Отсюда следует, что для каждого конденсатора и каждой индуктивной катушки, взятых отдельно, должны выполняться условия

$$\begin{cases} q_k(0_-) u_{ck}(0_-) = q_k(0_+) u_{ck}(0_+), \\ \Psi_k(0_-) i_{Lk}(0_-) = \Psi_k(0_+) i_{Lk}(0_+), \end{cases}$$

которые обычно и рассматриваются как законы коммутации цепи.

Если учесть, что в линейных цепях справедливы соотношения $q_k = C_k u_{ck}$ и $\Psi_k = L_k i_{Lk}$, то законы коммутации можно представить в виде

$$\begin{cases} C_k u_{ck}^2(0_-) = C_k u_{ck}^2(0_+), \\ L_k i_{Lk}^2(0_-) = L_k i_{Lk}^2(0_+), \end{cases}$$

что эквивалентно выполнению условий

$$\begin{cases} u_{Ck}(0_-) = u_{Ck}(0_+), \\ i_{Lk}(0_-) = i_{Lk}(0_+). \end{cases} \quad (18.26)$$

Отсюда следует, что в момент коммутации конденсаторы можно рассматривать как источники постоянного напряжения с $E_k = u_{Ck}(0)$, а индуктивные катушки — как источники постоянного тока с $J_k = i_{Lk}(0)$. Коммутацию с выполнением условий (18.26) называют корректной.

Для узлов электрической цепи, образованных ветвями, содержащими только конденсаторы и источники тока $J_k(t)$, справедливо условие

$$\sum_{k=1}^n i_{Ck}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{dq_k}{dt} = \sum_{k=1}^n J_k(t) < \infty,$$

а для контуров, образованных ветвями, содержащими только индуктивные катушки и источники напряжения $E_k(t)$, аналогично,

$$\sum_{k=1}^n u_{Lk}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{d\Psi_k}{dt} = \sum_{k=1}^n E_k(t) < \infty.$$

Из этих выражений следует, что в данном случае полные заряды или потоки не могут изменяться мгновенно, так как в противном случае их производные оказываются неограниченно большими. Следовательно, в этих случаях законы коммутации можно представить в виде

$$\begin{cases} \sum_k q_k(0_-) = \sum_k q_k(0_+), \\ \sum_k \Psi_k(0_-) = \sum_k \Psi_k(0_+). \end{cases} \quad (18.27)$$

или

$$\begin{cases} \sum_i C_i(0_-) u_{Ci}(0_-) = \sum_i C_i(0_+) u_{Ci}(0_+), \\ \sum_i L_i(0_-) i_{Li}(0_-) = \sum_i L_i(0_+) i_{Li}(0_+). \end{cases} \quad (18.28)$$

Уравнения (18.27) и (18.28) соответствуют так называемой некорректной коммутации. Такая коммутация сопряжена с потерями энергии в искре, которая возникает в процессе коммутации в коммутирующих элементах.

Пример 18.1. Для схемы (рис.18.6) определим токи в индуктивностях после размыкания ключа K . Схема питается от источника постоянного напряжения с $E = 12$ В, а параметры элементов имеют значения: $r_1 = 2$ Ом, $r_2 = r_3 = 4$ Ом, $L_1 = 20$ мГн, $L_2 = 10$ мГн.

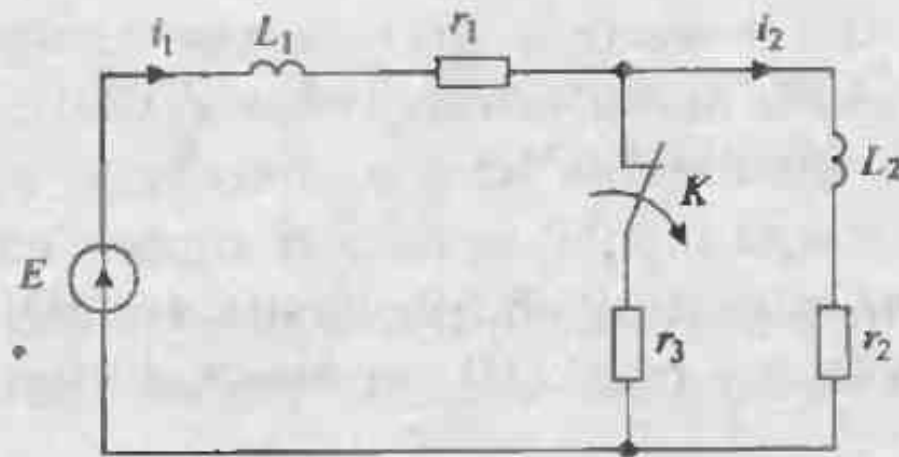


Рис. 18.6. Схема цепи к примеру 18.1

Решение. До размыкания ключа K в индуктивностях проходили токи, определяемые только сопротивлениями r_1 , r_2 и r_3 :

$$i_1(0_-) = \frac{E}{r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}} = \frac{12}{2 + 2} = 3 \text{ А.}$$

$$i_2(0_-) = \frac{E - i_1(0_-) r_1}{r_2} = \frac{12 - 3 \cdot 2}{4} = 1,5 \text{ А.}$$

Потокоцепления катушек до размыкания имели значения

$$\Psi_1(0_-) = L_1 i_1(0_-) = 60 \text{ мВб}; \Psi_2(0_-) = L_2 i_2(0_-) = 15 \text{ мВб.}$$

Энергия магнитного поля в катушках до коммутации

$$W_1(0_-) + W_2(0_-) = \frac{\Psi_1(0_-) i_1(0_-)}{2} + \frac{\Psi_2(0_-) i_2(0_-)}{2} = 101,25 \text{ мДж.}$$

После размыкания ключа K образуется один контур, в котором индуктивности L_1 и L_2 включены последовательно и тогда $i_1(0) = i_2(0) = i(0)$. При этом общее потокоцепление для момента времени $t = 0$ остается неизменным:

$$(L_1 + L_2) i(0) = L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-) = \Psi_1(0_-) + \Psi_2(0_-) = 75 \text{ мВб.}$$

Следовательно, ток в индуктивностях после коммутации имеет значение

$$i_1(0) = \frac{\Psi_1(0_-) + \Psi_2(0_-)}{L_1 + L_2} = 2,5 \text{ А.}$$

Таким образом, ток в индуктивности L_1 мгновенно уменьшился на 0,5 А, а в индуктивности L_2 увеличился на 1 А. Энергия магнитного поля в катушках непосредственно после коммутации уменьшилась на 7,5 мДж и рассеялась в искре при размыкании ключа K .

Лекция 19. Расчет переходных процессов по комплексным значениям

Особенности расчета переходных процессов по комплексным значениям.

Расчет переходных процессов по мгновенным значениям, рассмотренный в лекции 18, имеет ряд существенных недостатков:

- если воздействия имеют сложную форму, то возникает трудность в определении установившегося значения реакции;
- при решении системы дифференциальных уравнений могут быть трудности при формировании дифференциального уравнения относительно некоей переменной;
- встречаются затруднения в определении начальных условий, по которым производится расчет постоянных интегрирования.

В основу расчета переходных процессов по комплексным значениям положены интегральные преобразования Лапласа и Фурье. Способ расчета с использованием интегрального преобразования Лапласа получил название *операторного метода*. При использовании интегрального преобразования Фурье способ расчета называют *спектральным методом*.

Принципиальное различие между этими методами заключается в использовании различных комплексных переменных. Так в операторном методе в качестве комплексной переменной применяется «оператор» $s = \sigma + j\omega$, который содержит вещественную и мнимую части.

В спектральном методе используется только мнимая часть оператора s , т. е. в качестве комплексной переменной применяется оператор $j\omega$.

Поскольку преобразование Лапласа, основанное на применении оператора s , имеет меньше ограничений, ниже рассматривается только операторный метод. При расчете цепей операторным методом вначале производится замена мгновенных значений их комплексными изображениями, которые принято называть операторными функциями цепи. После этого выполняется расчет цепи в операторной форме с использованием законов Ома и Кирхгофа.

Затем определяется мгновенное значение реакции цепи при помощи формул обратного преобразования Лапласа. Порядок расчета цепей операторным методом показан на рис. 19.1.

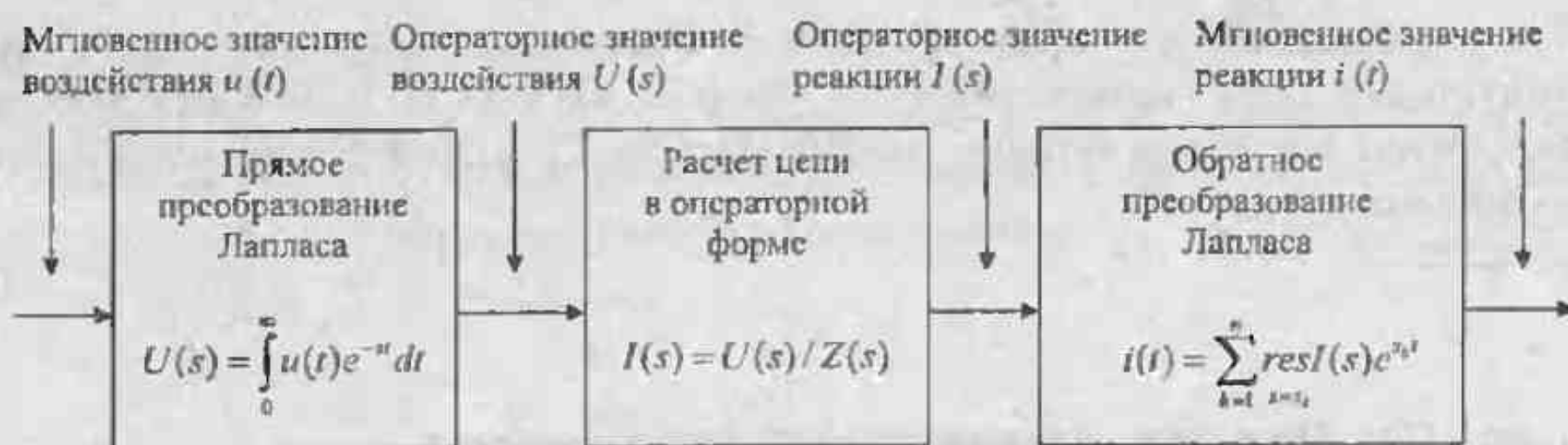


Рис. 19.1. Схема расчета нестационарного процесса операторным методом

Основные положения операторного метода. Основные положения операторного метода, основанного на применении преобразования Лапласа, были подробно рассмотрены в лекции 5. При помощи прямого преобразования Лапласа произвольная функция времени $f(t)$ заменяется операторной функцией $F(s)$, которая называется ее *изображением*

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (19.1)$$

Обратное преобразование операторного изображения $F(s)$ в функцию времени $f(t)$ осуществляется с помощью формул разложения или вычетов. В первом случае для определения обратного преобразования Лапласа используется формула разложения

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(s_k)}{F_2'(s_k)} e^{s_k t}, \quad (19.2)$$

где $F(s) = F_1(s)/F_2(s)$ — операторная функция, представленная в виде рациональной дроби;

$F_1(s)$ — полином числителя;

$F_1(s_k)$ — полином числителя при $s = s_k$;

$F_2(s)$ — полином знаменателя; $F_2'(s) = (dF_2/ds)_{s=s_k}$ — производная знаменателя при $s = s_k$;

s_k — корни уравнения $F_2(s) = 0$, называемые полюсами функции $F(s)$.

Во втором случае для вычисления обратного преобразования Лапласа используется формула вычетов

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \text{res}_{s=s_k} F(s) e^{s_k t}, \quad (19.3)$$

где: $\text{res}_{s=s_k} F(s)$ — вычет функции $F(s)$ в полюсе $s = s_k$.

Вычисление вычетов для случая рациональных дробей производится по формуле

$$\operatorname{res}_{s=s_k} F(s) = \frac{F_1(s_k)(s-s_k)}{\prod_{k=1}^n (s-s_k)}, \quad (19.4)$$

откуда следует, что для определения вычета в полюсе $s = s_k$ необходимо значение полюса подставить в числитель рациональной дроби $F_1(s_k)$, а в знаменате-

ле, представленном в виде произведения $\prod_{k=1}^n (s-s_k)$, исключить член $(s-s_k)$

при подстановке $s = s_k$ (при этом многочлен знаменателя должен быть приведенным, т. е. не содержать коэффициента при старшей степени s).

Законы Кирхгофа и Ома в операторной форме. Первый закон Кирхгофа для мгновенных значений токов в любом узле цепи имеет вид

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0.$$

Пользуясь свойством линейности преобразования Лапласа, получим уравнение первого закона Кирхгофа в операторной форме

$$\sum_{k=1}^n I_k(s) = 0. \quad (19.5)$$

Операторная схема, соответствующая уравнению (19.5), приведена на рис. 19.2, а. Следует отметить, что в уравнение (19.5) должны входить также источники тока, соответствующие ненулевым начальным условиям.

Второй закон Кирхгофа для мгновенных значений напряжений в любом замкнутом контуре цепи имеет вид

$$\sum_{k=1}^m u_k(t) = 0.$$

Аналогично, пользуясь свойством линейности преобразования Лапласа, получим

$$\sum_{k=1}^m U_k(s) = 0. \quad (19.6)$$

В уравнение (19.6) должны входить также источники напряжения, соответствующие ненулевым начальным условиям.

Операторная схема, соответствующая уравнению (19.6), приведена на рис. 19.2б. Заметим, что аналогично первому закону Кирхгофа, в уравнение должны входить источники напряжения, соответствующие ненулевым начальным условиям в реактивных элементах цепи.

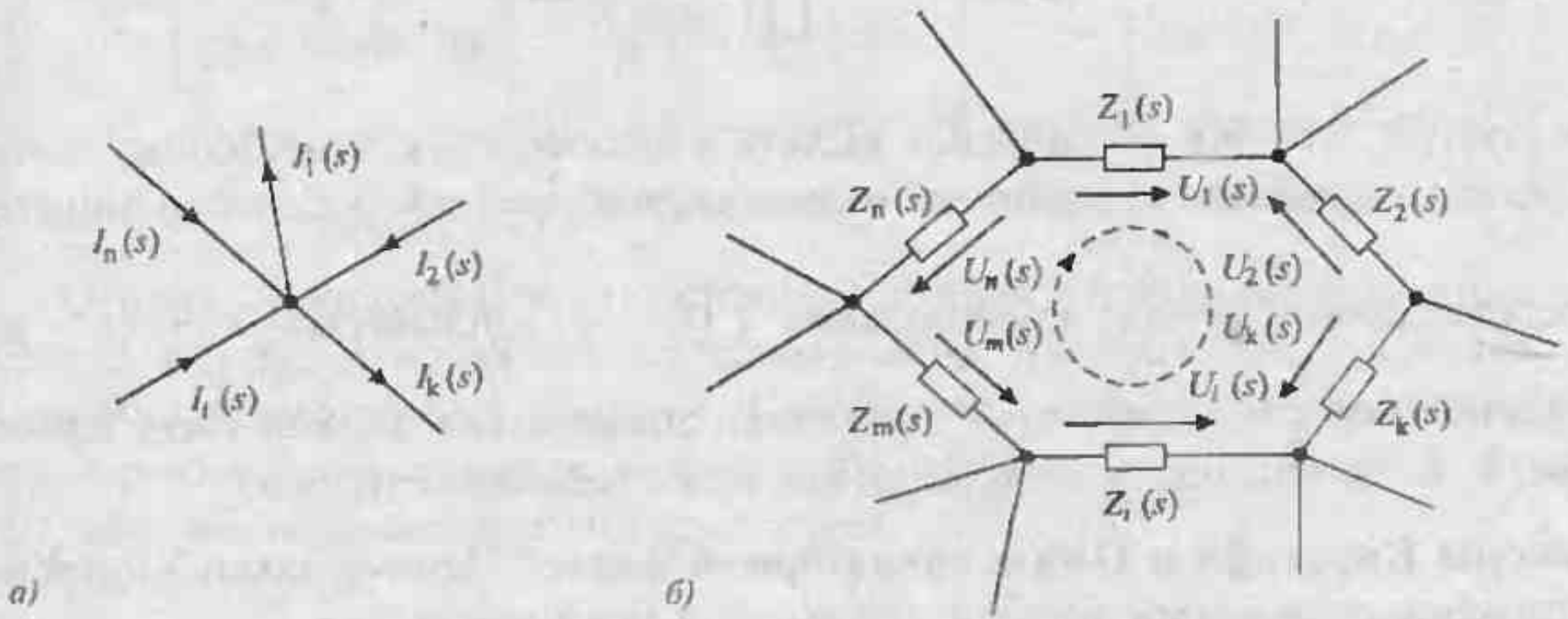


Рис. 19.2. Операторные схемы для узла (а) и контура (б) электрической цепи

Полученные выражения (19.5) и (19.6), показывают, что форма записи уравнений Кирхгофа для операторных значений токов и напряжений полностью совпадают с уравнениями для мгновенных значений.

Теперь рассмотрим закон Ома в операторной форме записи. Вначале рассмотрим цепи, содержащие только один из пассивных элементов r , L , C . Так для цепи, содержащей только сопротивление r , мгновенное значение реакции $u_r(t)$ записывается в виде

$$u_r(t) = i(t)r.$$

Применяя к этому выражению прямое преобразование Лапласа, получим

$$U_r(s) = I(s)r, \tag{19.7}$$

откуда следует, что формы записи этих уравнений совпадают.

Для цепи, содержащей только индуктивность L , мгновенное значение реакции $u_L(t)$ можно представить в виде

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt}.$$

Применяя к этому выражению преобразование Лапласа, получим

$$U_L(s) = sLI(s) - L i_L(0_+), \tag{19.8}$$

откуда следует, что напряжение на индуктивности равно сумме напряжений на операторном сопротивлении индуктивности $Z_L(s) = sL$ от тока $I(s)$ и напряжения $Li_L(0_+)$, обусловленного начальным током $i_L(0_+)$ в индуктивности.

Для цепи с одной емкостью C мгновенное значение реакции имеет вид

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u_C(0_+).$$

Применяя к этому выражению преобразование Лапласа, найдем операторное значение реакции

$$U_C(s) = I(s)/(sC) + u_C(0_+)/s, \quad (19.9)$$

откуда следует, что напряжение на емкости равно разности напряжений на операторном сопротивлении емкости $Z_C(s) = 1/(sC)$ от тока $I(s)$ и напряжения $u_C(0_+)/s$, обусловленного начальным напряжением на емкости.

Таким образом, если элементы r, L, C включены последовательно, то мгновенное напряжение на них определяется суммой $u = u_r + u_L + u_C$ и, следовательно, операторное значение этой суммы имеет вид

$$U(s) + Li_L(0_+) - u_C(0_+)/s = [r + sL + 1/(sC)] I(s) = Z(s)I(s), \quad (19.10)$$

где $Z(s) = r + sL + 1/(sC)$ — операторное сопротивление цепи.

Уравнение (19.10) рассматривается как закон Ома в операторной форме для последовательной цепи. Операторная схема замещения, соответствующая уравнению (19.10), приведена на рис. 19.3, а.

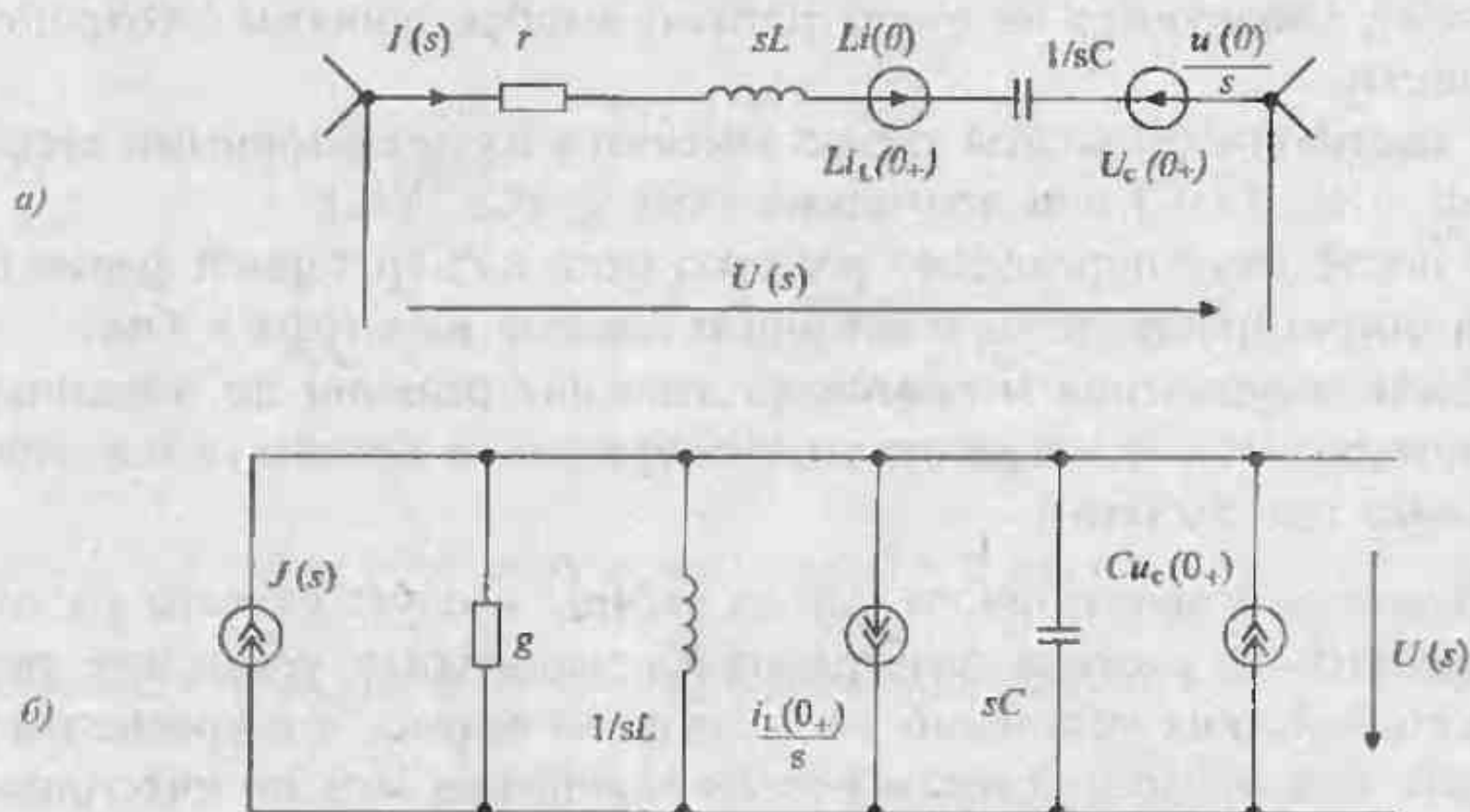


Рис. 19.3. Последовательная (а) и параллельная (б) операторные схемы цепей

Аналогичным образом можно получить закон Ома для параллельного соединения элементов g , L , C

$$I(s) + i_L(0+)/s - Cu_C(0+) = [g + sC + 1/(sL)]U(s) = Y(s)U(s), \quad (19.11)$$

где $Y(s) = g + sC + 1/(sL)$ — операторная проводимость цепи.

Уравнение (19.11) можно рассматривать как закон Ома для параллельной цепи. Операторная схема замещения, соответствующая уравнению (19.11), приведена на рис. 19.3, б.

Порядок расчета цепей операторным методом. При расчете нестационарных процессов в цепях операторным методом целесообразно придерживаться определенной последовательности (алгоритма расчета):

□ используя оригинальную схему и законы коммутации, рассмотренные в лекции 18, следует вначале определить начальные (ненулевые) условия в цепи $i_L(0_+)$ и $u_C(0_+)$;

□ затем составляют операторную схему замещения для $t = 0_+$, в которой должны отсутствовать элементы коммутации (ключи или переключатели);

□ ненулевые начальные условия учитываются введением дополнительных источников напряжения $u_C(0_+)/s$, $Li_L(0_+)$ или тока $i_L(0_+)/s$, $Cu_C(0_+)$;

□ направления дополнительных источников должны соответствовать направлениям токов в индуктивностях и напряжениям на емкостях исходной схемы;

□ независимые источники напряжения и тока, входящие в исходную схему, заменяются их операторными изображениями с сохранением полярности;

□ пассивные элементы схемы заменяются их операторными сопротивлениями r , sL , $1/(sC)$ или проводимостями g , sC , $1/(sL)$;

□ после этого определяют реакцию цепи в операторной форме путем расчета операторной схемы с помощью законов Кирхгофа и Ома;

□ для определения мгновенного значения реакции по найденному в результате расчета ее операторному изображению используются формулы разложения или вычетов.

К достоинствам операторного метода расчета следует отнести то, что решению подлежит не система интегродифференциальных уравнений цепи, а система алгебраических уравнений в операторной форме. Эти уравнения можно составлять или по операторным схемам замещения или по интегродифференциальным уравнениям исходной цепи.

Обратное преобразование полученного в результате расчета операторного значения реакции можно выполнять не только с помощью формул разложения

или вычетов, но также и по справочным таблицам, в которых приводятся большое количество различных функций. Эти же таблицы можно использовать для нахождения изображения воздействия.

Проиллюстрируем все сказанное выше на примере расчета цепи в переходном режиме.

Пример 19.1. Требуется определить ток в источнике напряжения E при замыкании ключа в схеме, изображенной на рис. 19.4, а, если параметры схемы имеют следующие значения: $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 10$ Ом, $E = 120$ В, $C = 10^{-6}$ Ф.

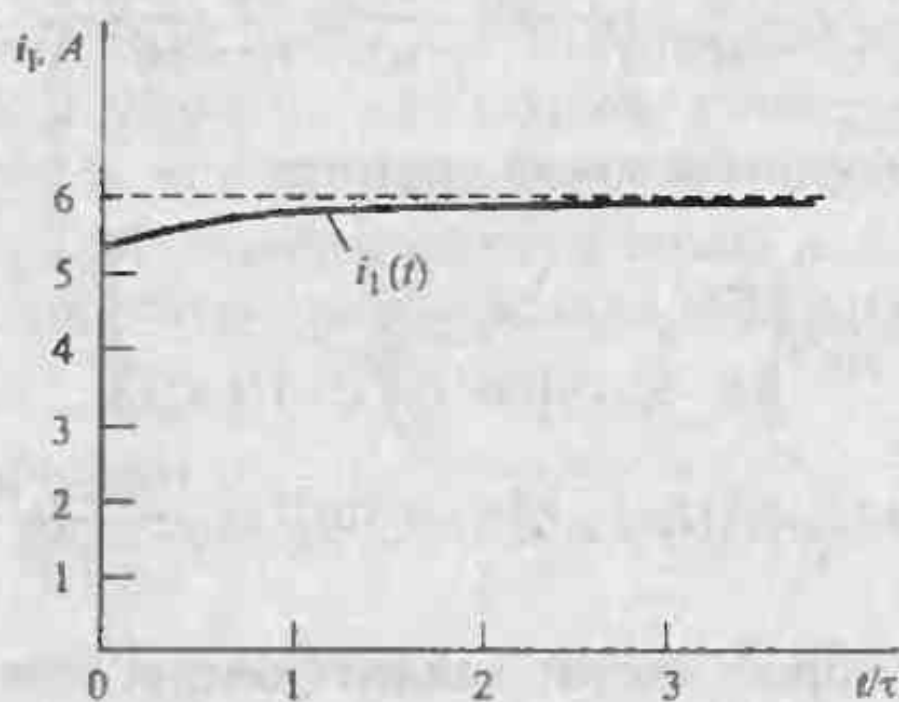
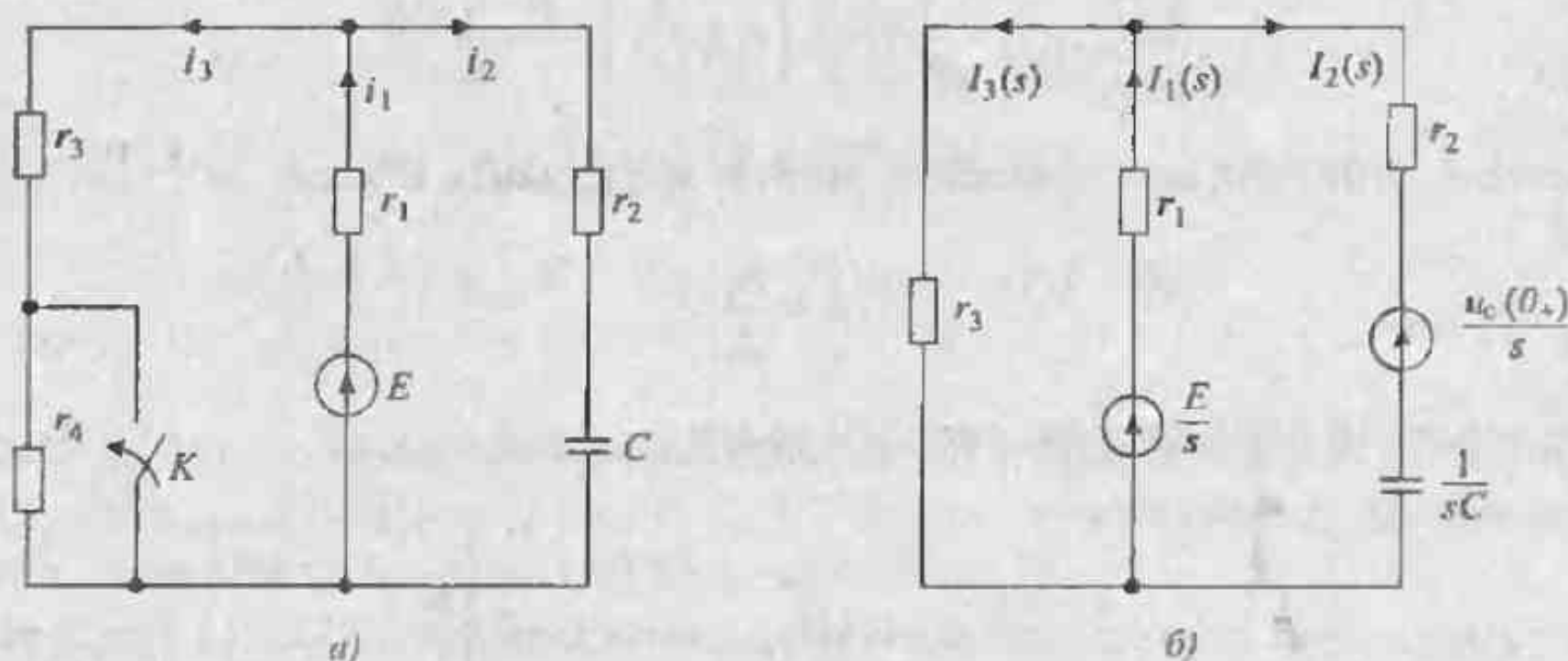


Рис. 19.4. Исходная схема (а), схема замещения (б) и график тока в переходном режиме (в)

Решение. Определим начальное напряжение на емкости C

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = E(r_3 + r_4)/(r_1 + r_3 + r_4) = 120 \cdot 20/30 = 80 \text{ В.}$$

Составим операторную схему замещения после замыкания ключа K , которая приведена на рис. 19.4, б. В этой схеме ненулевые начальные условия в емкости C учтены введением последовательно с емкостью источника напряжения $u_C(0_+)/s$.

Для схемы замещения запишем уравнения, составленные по законам Кирхгофа

$$\begin{cases} I_1 r_1 + I_3 r_3 = E/s, \\ I_1 r_1 + I_2 [r_2 + 1/(sC)] = E/s - u_C(0)/s, \\ I_1 = I_2 + I_3. \end{cases}$$

После подстановки значения тока I_2 , получим систему уравнений

$$\begin{cases} I_1 r_1 + I_3 r_3 = E/s, \\ I_1 \left(r_1 + r_2 + \frac{1}{sC} \right) - I_3 \left(r_2 + \frac{1}{sC} \right) = \frac{E - u_C(0)}{s}. \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений можно представить в виде

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

где основной определитель системы равен

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} r_1 & r_3 \\ r_1 + r_2 + 1/(sC) & -(r_2 + 1/sC) \end{vmatrix} = \\ &= -r_1 r_2 - \frac{r_1}{sC} - r_3 r_3 - r_2 r_3 - \frac{r_3}{sC} = -\frac{20 + 300sC}{sC}. \end{aligned}$$

Первый частный определитель имеет значение

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} E/s & r_3 \\ [E - u_C(0)]/s & -(r_2 + 1/sC) \end{vmatrix} = \\ &= -[r_2 + 1/(sC)] E/s - r_3 [E - u_C(0)]/s = \frac{1600sC + 120}{s^2 C}. \end{aligned}$$

Подставляя значение определителей, найдем значение тока I_1

$$I_1 = \frac{sC(1600sC + 120)}{(20 + 300sC)s^2 C} = \frac{6 + 80sC}{s(1 + 15sC)} = \frac{6 + 80sC}{15sC[s + 1/(15C)]}.$$

Корни знаменателя имеют значения $s_1 = 0$, $s_2 = -1/15C$. Пользуясь формулой разложения, найдем мгновенное значение тока

$$i_1 = 6 - 0,67 e^{-5,67 \cdot 10^4 t} \text{ А.}$$

График тока в цепи приведен на рис. 19.4, в.

Определение системных функций цепи. В общем случае реакция $y(t)$ и воздействие $x(t)$ связаны между собой линейным дифференциальным уравнением n -го порядка, изображение которого на плоскости комплексного переменного s имеет вид

$$\begin{aligned} (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) y(s) = & (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) x(s) - \\ & - (b_m s^{m-1} + b_{m-1} s^{m-2} + \dots + b_1) x(0) - \\ & - (b_m s^{m-2} + b_{m-1} s^{m-3} + \dots + b_2) x'(0) - \dots - b_m x^{m-1}(0) + \\ & + (a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_1) y(0) + (a_n s^{n-2} + a_{n-1} s^{n-3} + \dots + a_1) y'(0) + \\ & + (a_n s^{n-2} + a_{n-1} s^{n-3} + a_2) y''(0) + \dots + a_n y^{n-1}(0), \end{aligned} \quad (19.12)$$

где $x(s)$, $y(s)$ — изображения воздействия и реакции, соответственно; $x(0)$, $x'(0)$, ..., $x^{m-1}(0)$, $y(0)$, $y'(0)$, ..., $y^{n-1}(0)$ — начальные значения воздействия, реакции и их производных при $t = 0$.

Уравнение (19.12), справедливое для установившегося и переходного режимов цепи, показывает, что реакция цепи в течение переходного процесса зависит от вида воздействия $[x(s), x(0), \dots, x^{m-1}(0)]$, начальных запасов энергии в ее реактивных элементах $[y(0), y'(0), \dots, y^{n-1}(0)]$, от структуры и элементного состава цепи, характеризуемых вещественными коэффициентами $a_n, \dots, a_0, b_m, \dots, b_0$.

Если первоначально цепь находилась в покое и начальные запасы энергии в ее реактивных элементах отсутствовали, то уравнение (19.12) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) y(s) = \\ = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) x(s) \end{aligned} \quad (19.13)$$

Отношение изображения реакции цепи, свободной от начальных запасов энергии в ее реактивных элементах, к изображению воздействия называют *системной или схемной функцией цепи* и обозначают как

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (19.14)$$

Так как дифференциальное уравнение линейной цепи имеет вещественные коэффициенты, то ее системная функция (19.14) представляет собой рациональную функцию комплексной переменной s . Полиномы $B(s)$, $A(s)$ числителя

и знаменателя являются вещественными и могут быть разложены на линейные множители. При этом функция $H(s)$ выражается через особые точки — нули s'_1, s'_2, \dots, s'_m и полюсы s_1, s_2, \dots, s_n :

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = K \frac{(s - s'_1)(s - s'_2) \dots (s - s'_m)}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)}, \quad (19.15)$$

где $K = b_m/a_n$ — постоянный множитель.

Значение комплексной переменной s'_j обращает функцию $H(s)$ в нуль, а значение s_i обращает $H(s)$ в бесконечность. Нули и полюсы дробно-рациональной функции $H(s)$ могут быть комплексно сопряженными или вещественными.

Сумма двух комплексно сопряженных корней дает в решении дифференциального уравнения затухающую по экспоненте функцию.

Поэтому в свободной реакции пассивной цепи с резистивными и реактивными элементами могут присутствовать апериодические и гармонические затухающие по экспоненциальному закону составляющие вида

$$y_{св}(t) = \sum_{j=1}^{n-2m} A_j e^{-\delta_j t} + \sum_{i=1}^m A_i e^{-\delta_i t} \cos(\omega_{св_i} t + \psi_i) \quad (19.16)$$

где δ_j — некрратные вещественные полюсы функции (корни характеристического уравнения);

$-\delta_i \pm j\omega_{св_i}$ — пара комплексно сопряженных корней;

$\delta_i, j\omega_{св_i}$ — показатель затухания и частота свободных затухающих колебаний i -ой составляющей реакции цепи;

A_j, A_i, ψ_i — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Выводы

□ Если полюсы функции $H(s)$ расположены на мнимой оси комплексной плоскости s , то такие цепи находятся на границе устойчивости и свободные колебания в них имеют незатухающий характер.

□ Если же полюсы функции $H(s)$ цепи с активными элементами расположены в правой полуплоскости s , то такая цепь неустойчива и свободные колебания в ней носят расходящийся во времени характер.

□ Системная функция $H(s)$ дает представление о реакции свободной от начальных запасов энергии цепи на различные виды воздействий, в том числе и на импульсные воздействия.

Частными случаями системных функций являются реакции цепи на единичную $\delta_1(t)$ или единичную импульсную $\delta(t)$ функции. Действительно, при

единичном импульсном воздействии изображение $x(s) = \mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, и из уравнения (19.14) следует, что

$$y(s) = H(s)x(s) = H(s) \cdot 1 = \mathcal{F}[h(t)], \quad (19.17)$$

откуда находим импульсную переходную характеристику цепи

$$y(t) = h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(s)]. \quad (19.18)$$

Уравнение (19.18) показывает, что импульсная переходная функция цепи представляет собой \mathcal{F} -изображение реакции цепи, свободной от начальных запасов энергии, на единичное импульсное воздействие $\delta(t)$.

Аналогично можно определить реакцию цепи на ступенчатое воздействие $\delta_1(t)$ при отсутствии запасов энергии в ее реактивных элементах. Эта реакция называется *переходной характеристикой цепи*

$$h_1(t) = \int h(t) dt. \quad (19.19)$$

Изображение переходной характеристики с учетом выражения (19.18) имеет вид

$$\mathcal{F}[h_1(t)] = \mathcal{F}[h(t)]/s = H(s)/s. \quad (19.20)$$

Системная функция также характеризует реакцию цепи в установившемся режиме, когда $u_{\text{св}}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Пример 19.2. Определить передаточную функцию цепи по току $H_i(s)$, импульсную переходную характеристику $h_i(t)$ и ток $i(t)$ для цепи (рис. 19.5, а) при $e(t) = \Delta\delta(t)$.

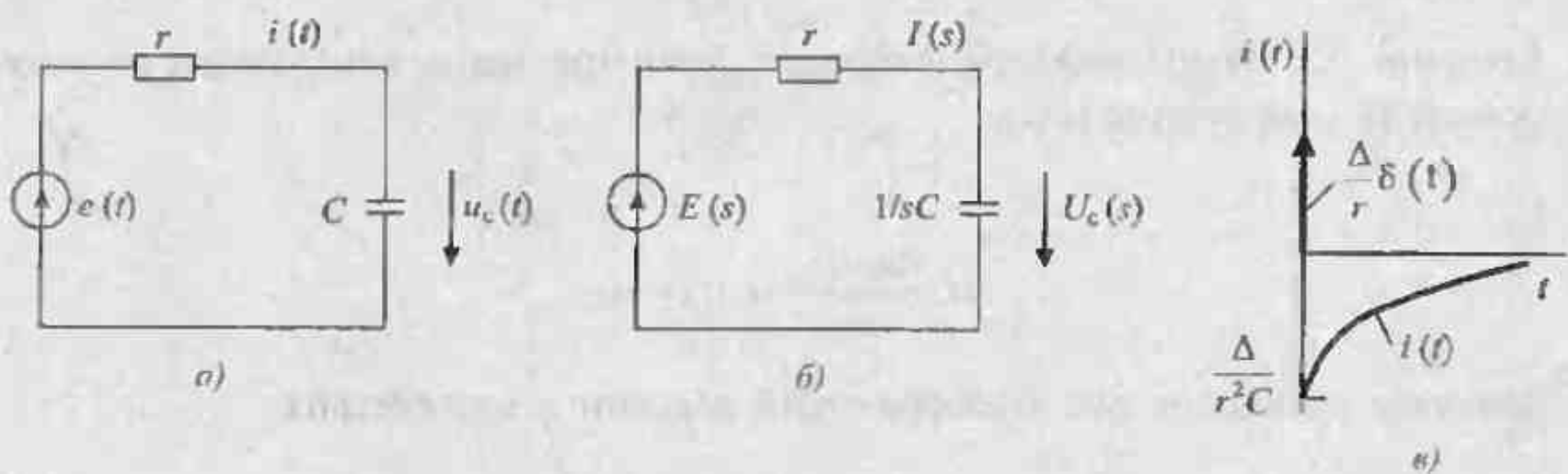


Рис. 19. 5. Исходная схема (а), схема замещения (б) и график переходного тока (в)

Решение. Составим дифференциальное уравнение для схемы (рис. 19.5, а):

$$ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t).$$

Построим операторную схему замещения цепи при нулевых начальных условиях в емкости (рис. 19.5, б). Запишем уравнение для изображений реакции $I(s)$ и воздействия $E(s)$:

$$\left(r + \frac{1}{sC}\right)I(s) = E(s).$$

Передаточная функция цепи по току (передаточная проводимость)

$$H_i(s) = \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{r + 1/(sC)} = \frac{sC}{1 + sCr} = \frac{1}{r} \frac{1}{r^2C[s + 1/rC]}.$$

Импульсная характеристика $h_i(t)$ определяется с помощью таблиц преобразования Лапласа

$$h_i(t) = \mathcal{T}^{-1}[H_i(s)] = \frac{1}{r}\delta(t) - \frac{1}{r^2C}e^{-t/(rC)}\delta_1(t).$$

Ток в цепи при напряжении на входе $e(t) = \Delta\delta(t)$

$$i(t) = \frac{\Delta}{r}\delta(t) - \frac{\Delta}{r^2C}e^{-t/(rC)}\delta_1(t).$$

График тока $i(t)$, изображенный на рис. 19.5, а, содержит импульсную $\Delta\delta(t)/r$ и экспоненциальную $\Delta e^{-t/(rC)}\delta_1(t)/r^2C$ составляющие.

Пример 19.3. Определить передаточную функцию цепи по напряжению на емкости $H_{uc}(s)$, импульсную переходную характеристику $h_{uc}(t)$ и напряжение на емкости $u_c(t)$ для схемы (рис. 19.5, а) при $e(t) = \Delta\delta(t)$.

Решение. Составим дифференциальное уравнение цепи, используя в качестве переменной напряжение $u_c(t)$:

$$rC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = e(t).$$

Запишем уравнение для \mathcal{T} -изображений реакции и воздействия:

$$rCsU_c(s) + U_c(s) = E(s).$$

Передаточная функция цепи

$$H_{uc}(s) = \frac{U_c(s)}{E(s)} = \frac{1}{1 + rCs}.$$

импульсная характеристика цепи

$$h_{u_C}(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_{u_C}(s)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+rCs}\right] = \frac{1}{rC} e^{-t/(rC)} \delta_1(t)$$

по напряжению на емкости.

Напряжение на емкости $u_C(t)$ при воздействии $e(t) = \Delta\delta(t)$

$$u_C(t) = \Delta h_{u_C}(t) = \frac{\Delta}{rC} e^{-t/(rC)} \delta_1(t).$$

Таким образом, при импульсном воздействии напряжение на емкости не содержит импульсной составляющей при $t = 0$. Оно возрастает скачком от 0 до $u_C(0_+) = \Delta/(rC)$, а затем уменьшается по экспоненциальному закону, так как цепь остается замкнутой и энергия, запасенная в емкости, рассеивается в сопротивлении r .

МЕТОДЫ РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Лекция 20. Топология электрических цепей и их эквивалентные преобразования

Электрическую цепь, отображающую электромагнитные процессы в реальных устройствах, составляют путем соединения между собой элементов, рассмотренных в разделе 3. При соединении элементов получается электрическая цепь, имеющая определенную геометрическую (топологическую) структуру. Пример электрической цепи, содержащей пассивные и активные элементы, приведен на рис. 20.1.

Топология электрической цепи характеризуется двумя основными понятиями: ветвью и узлом. При этом *ветвью* электрической цепи называют ее участок, имеющий два вывода, через которые цепь взаимодействует с остальной цепью. *Состояние* цепи характеризуется токами и напряжениями ветвей. При анализе электрической цепи обычно полагают, что определению подлежат токи и напряжения ветвей при условии, что параметры всех элементов цепи известны. Ветвью могут быть отдельные двухполюсные элементы, однако для уменьшения числа переменных часто под ветвью понимают участки цепи, имеющие одно и то же значение тока или одно и то же значение напряжения, т. е. участки цепи с последовательным или параллельным соединением двухполюсных элементов. Так, для цепи, представленной на рис. 20.1, ветвями можно считать участки с элементами $E - r_1 - C_1$, $L_1 - r_2$, $J - r_3$.

Узлом электрической цепи называют место соединения двух ветвей и более. Если в узле соединены только две ветви, то он — простой. Узел, который содержит хотя бы одну ветвь, не входящую в другие узлы, называют независимым.

При изучении топологических свойств электрической цепи содержание ветвей не имеет значения, поэтому ветви изображают отрезками линий, включенных между узлами. Совокупность узлов и ветвей (линий) между ними называют *топологическим* (или структурным) *графом* электрической цепи. На рис. 20.2 представлен топологический граф цепи, изображенной на рис. 20.1.

Ветвям графа могут быть приписаны определенные направления, обычно совпадающие с направлениями токов в ветвях и обозначаемые стрелками. Такой граф называют *направленным*.

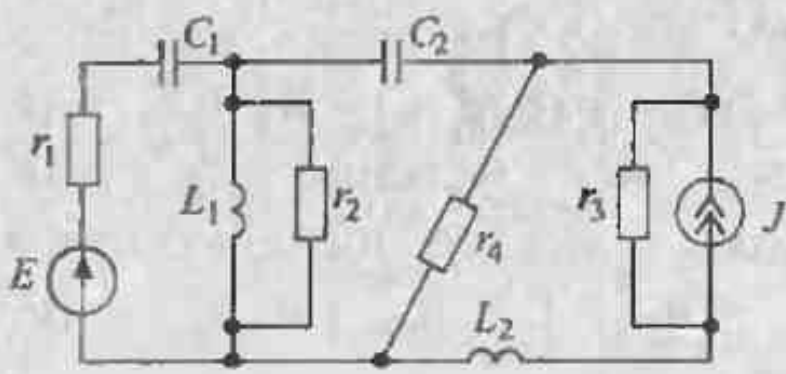


Рис. 20.1. Схема электрической цепи

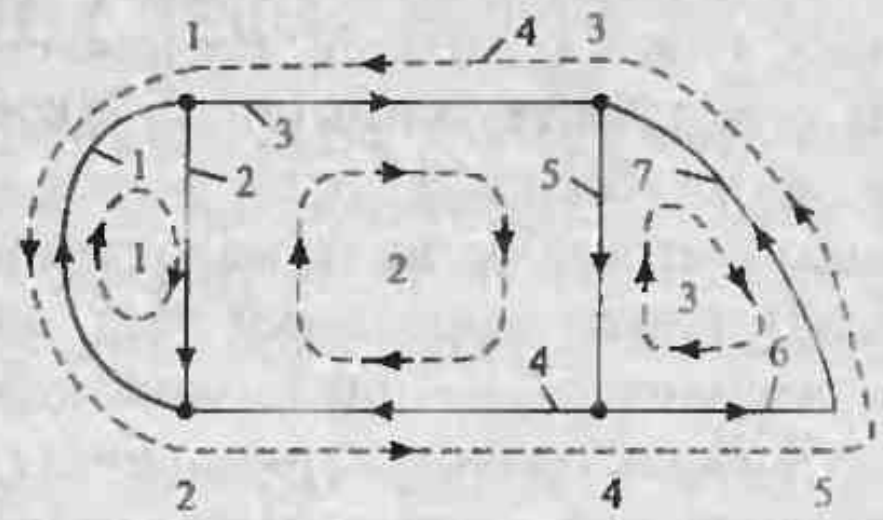


Рис. 20.2. Топологический граф цепи

Любую часть графа электрической цепи называют его **подграфом**. Подграф получается удалением некоторых ветвей графа. Если подграф образуется непрерывной последовательностью ветвей, связывающих пару выбранных узлов, то его называют **путем графа**. Если начальным и конечным узлами в пути графа является один и тот же узел, то такой путь называют **контуром графа** или, иначе, замкнутым путем по ветвям графа, при котором каждый узел проходит только один раз.

Подграф, образованный удалением из графа минимального количества ветвей таким образом, что разрушаются все контуры, но сохраняются все узлы, называют **деревом графа**. Ветви, удаленные из графа для образования дерева, называют **ветвями связи**.

Контур, который содержит хотя бы одну ветвь, не входящую в другие контуры, называют **независимым контуром**. Очевидно, что независимый контур образуется всякий раз, когда к дереву графа добавляется ветвь связи. Контур, образованный ветвями дерева и только одной ветвью связи, называют **главным**. Главные контуры являются независимыми. Число главных контуров равно числу ветвей связи и определяется выражением $n_{нк} = n_c = n_b - n_d$, где $n_{нк}$ — число независимых контуров; n_c — число ветвей связи; n_d — число ветвей дерева.

Два дерева графа, изображенного на рис. 20.2, приведены на рис. 20.3. Дерево, изображенное на рис. 20.3, а, получено удалением ветвей 2, 5, 7. Дерево, изображенное на рис. 20.3, б, получено удалением ветвей 1, 2, 6.

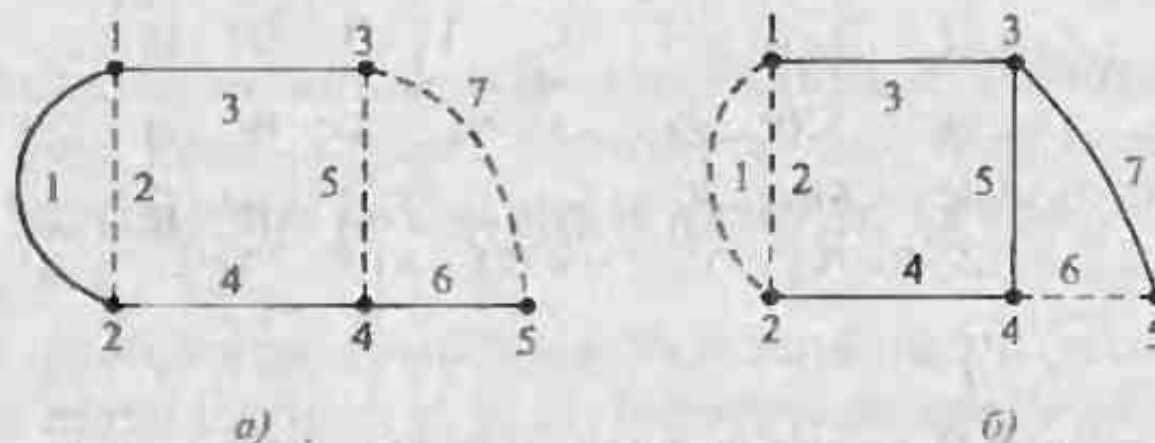


Рис. 20.3 Дерево графа с удалением ветвей 2, 5, 7 (а) и с удалением ветвей 1, 2, 6 (б)

Если определению подлежат токи всех ветвей, то число неизвестных равно числу ветвей n_b графа и, следовательно, общее число уравнений, необходимых для определения неизвестных токов, должно быть равно $n_b = n_d + n_c$. Однако, как легко убедиться, число ветвей дерева равно числу независимых узлов, поскольку первая ветвь дерева содержит два узла, а каждая последующая ветвь вводит только один новый узел, поэтому $n_d = n_y - 1 = n_{ny}$, где n_y — полное число узлов; n_{ny} — число независимых узлов.

Число ветвей связи равно числу независимых контуров $n_{нк}$, поэтому $n_c = n_{нк}$. Следовательно, полное число уравнений цепи равно сумме: $n_b = n_{ny} + n_{нк}$.

Топологическую структуру цепи можно описать с помощью специальных таблиц (матриц), которые определяют взаимные связи ветвей с узлами и контурами графа. Узловая матрица **A** представляет собой таблицу, строки которой соответствуют узлам графа, а столбцы — его ветвям. Значения элементов узловой матрицы определяются следующим образом. Если ветвь i связана с узлом j и направлена от узла, то ей приписывают значение $+1$. Если ветвь i связана с узлом j и направлена к узлу, то ей приписывают значение -1 . Если же ветвь i не связана с узлом j , то ей приписывают нулевое значение. Таким образом, элементы строки показывают, какие ветви входят в узел или выходят из него.

Узловая матрица может быть составлена для всех узлов цепи или только для независимых. Если узловую матрицу составляют для всех узлов цепи, то ее называют *неопределенной*. Сумма элементов любого столбца такой матрицы равна нулю.

Если узловую матрицу составляют только для независимых узлов, то ее называют *определенной*. При этом один из узлов графа считают базисным или опорным и он не входит в матрицу. По известной узловой матрице можно построить граф цепи. Определенная узловая матрица, составленная для графа, изображенного на рис. 20.2, при условии, что узел 5 принят за базисный, имеет вид

Ветви	1	2	3	4	5	6	7
Узлы							
1	-1	1	1	0	0	0	0
2	1	-1	0	-1	0	0	0
3	0	0	-1	0	1	0	-1
4	0	0	0	1	-1	1	0

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Контурная матрица **B** представляет собой таблицу, строки которой соответствуют контурам графа, а столбцы — его ветвям. Элементы матрицы имеют

следующие значения: если контур i содержит ветвь j и направление обхода контура совпадает с направлением ветви, то элемент матрицы имеет значение $+1$; если контур i содержит ветвь j и направление обхода контура противоположно направлению ветви, то элемент матрицы имеет значение -1 ; если же контур i не содержит ветви j , то элемент матрицы имеет нулевое значение. Таким образом, элементы строки матрицы \mathbf{B} показывают, какие ветви входят в контуры и как они направлены.

Контурную матрицу составляют для всех контуров цепи или только для независимых. Если контурную матрицу составляют для всех контуров цепи, то ее называют неопределенной. При этом полное число контуров определяют из условия, что каждая ветвь графа входит в два противоположно направленных контура.

Если контурная матрица составлена только для независимых контуров, то ее называют определенной. При этом один из контуров считают базисным или опорным и он не входит в матрицу \mathbf{B} . По известной контурной матрице можно построить граф цепи.

Определенная контурная матрица, составленная для графа, изображенного на рис. 20.2, при условии, что контур 4 принят за базисный, имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \text{Контур} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{Ветви} \\ \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Обобщением понятия узла является сечение графа. **Сечением** называют замкнутую поверхность, охватывающую часть графа электрической цепи. На чертеже сечение изображают в виде следа этой поверхности, рассекающей граф на две части. Тем самым сечение графа делит его на два изолированных подграфа.

Сечение называют **независимым** или **главным**, если оно содержит ветви связи и только одну ветвь дерева. Следовательно, каждая ветвь дерева позволяет построить только одно независимое сечение, поэтому полное число главных сечений $n_{гс} = n_d = n_{ву}$.

На рис. 20.4 изображен граф электрической цепи, содержащий дерево с ветвями 2, 3, 5 и ветви связи 1, 4, 6. Пунктирными линиями на графе нанесены сечения. Каждое сечение содержит только одну ветвь дерева и, следовательно, является независимым.

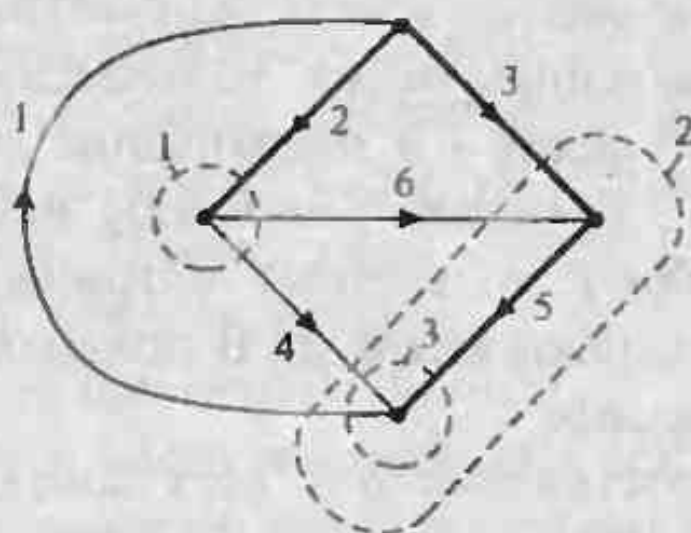


Рис 20.4. Пример узлов и сечений графа

Для сечений можно записать таблицу, которую называют **матрицей сечений**. Она показывает, какие ветви графа связаны с сечениями. Если ветвь i связана с сечением j и совпадает по направлению с ветвью дерева этого сечения, то элемент матрицы имеет значение $+1$, если ветвь i связана с сечением j и направлена противоположно направлению ветви дерева этого сечения, то элемент матрицы равен -1 ; если же ветвь i не связана с сечением j , то элемент матрицы имеет нулевое значение.

Матрица сечений, построенная для графа, изображенного на рис.20.4, имеет вид

		Ветви	1	2	3	4	5	6
Сечения								
Q =	1		0	1	0	-1	0	-1
	2		-1	0	1	1	0	1
	3		-1	0	0	1	1	0

Таким образом, для описания топологии электрической цепи достаточно построить ее граф, который полностью характеризуется одной из трех матриц: узловой, контурной или сечений. Уравнения, составленные для графа электрической цепи по законам Кирхгофа, называют топологическими и подразделяют на три группы: **узловые, контурные и сечений**.

Для упрощения графа электрической цепи применяют эквивалентные преобразования, позволяющие заменить часть исходной цепи другой эквивалентной цепью с более простой структурой. На рис. 20.5,а изображен граф некоторой части цепи, входные токи и напряжения которой имеют значения $I_1^{(1)}, \dots, I_k^{(1)}, \dots, I_n^{(1)}$; $U_1^{(1)}, \dots, U_k^{(1)}, \dots, U_n^{(1)}$. Граф эквивалентной цепи изображен на рис.20.5,б. Условие эквивалентности этих графов заключается в равенстве токов и напряжений соответственных входов: $I_k^{(2)} = I_k^{(1)}$, $U_k^{(2)} = U_k^{(1)}$.

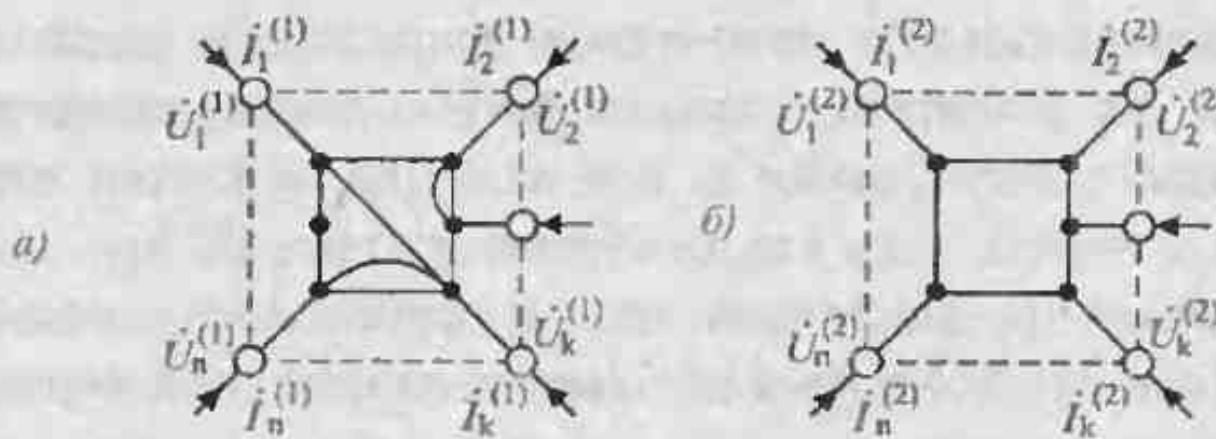


Рис. 20.5. Исходный (а) и эквивалентный ему (б) графы цепи

Эквивалентные преобразования включают объединение последовательно или параллельно включенных элементов, замену источников тока источниками напряжения и источников напряжения источниками тока, замену части цепи активным двухполюсником. Они могут использоваться при расчете как установившихся, так и переходных процессов в цепи. При расчете установившихся режимов в цепях необходимо пользоваться моделями элементов в комплексной форме, а при расчете переходных режимов — в операторной форме. Уравнения эквивалентных преобразований с применением законов Кирхгофа приведены в табл. 20.1.

Таблица 20.1

Эквивалентные преобразования в электрических цепях

Исходная схема	Эквивалентная схема	Уравнения эквивалентности	Условия эквивалентности
		$i = \frac{\dot{E} - \dot{U}}{Z} = j_s - \dot{U}Y_s$	$Y_s = Z^{-1}, j_s = \dot{E}Z^{-1}$
		$\dot{U} = \sum_{k=1}^n (\dot{E}_k - iZ_k) = \dot{E}_s - Z_s i$ $\sum_{k=1}^n \dot{E}_k - i \sum_{k=1}^n Z_k = \dot{E}_s - Z_s i$	$\dot{E}_s = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k$ $Z_s = \sum_{k=1}^n Z_k$
		$\dot{U} = \sum_{k=1}^n (i - j_k)Z_k = (i - j_s)Z_s$ $i \sum_{k=1}^n Z_k - \sum_{k=1}^n j_k Z_k = iZ_s - j_s Z_s$	$Z_s = \sum_{k=1}^n Z_k$ $j_s = \sum_{k=1}^n j_k Z_k / \sum_{k=1}^n Z_k$
		$i = \sum_{k=1}^n (\dot{E}_k - \dot{U})Y_k = (\dot{E}_s - \dot{U})Y_s$ $\sum_{k=1}^n \dot{E}_k Y_k - \dot{U} \sum_{k=1}^n Y_k = \dot{E}_s Y_s - \dot{U} Y_s$	$Y_s = \sum_{k=1}^n Y_k$ $\dot{E}_s = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k Y_k / \sum_{k=1}^n Y_k$
		$i = \sum_{k=1}^n j_k - \dot{U} \sum_{k=1}^n Y_k = j_s - \dot{U} Y_s$	$Y_s = \sum_{k=1}^n Y_k$ $j_s = \sum_{k=1}^n j_k$

Наличие в схеме идеальных источников напряжения, включенных между узлами цепи, приводит к понижению порядка системы уравнений Кирхгофа. Так, если в k -й ветви между узлами m и n включен источник напряжения \dot{E}_k с сопротивлением $Z_k = Y_k^{-1} = 0$, как показано на рис. 20.6, а, то узлы m и n объединяют, а источник \dot{E}_k переносят во все другие ветви, связанные с этим узлом. Правила переноса идеального источника напряжения через узел показано на рис. 20.6, б, в.

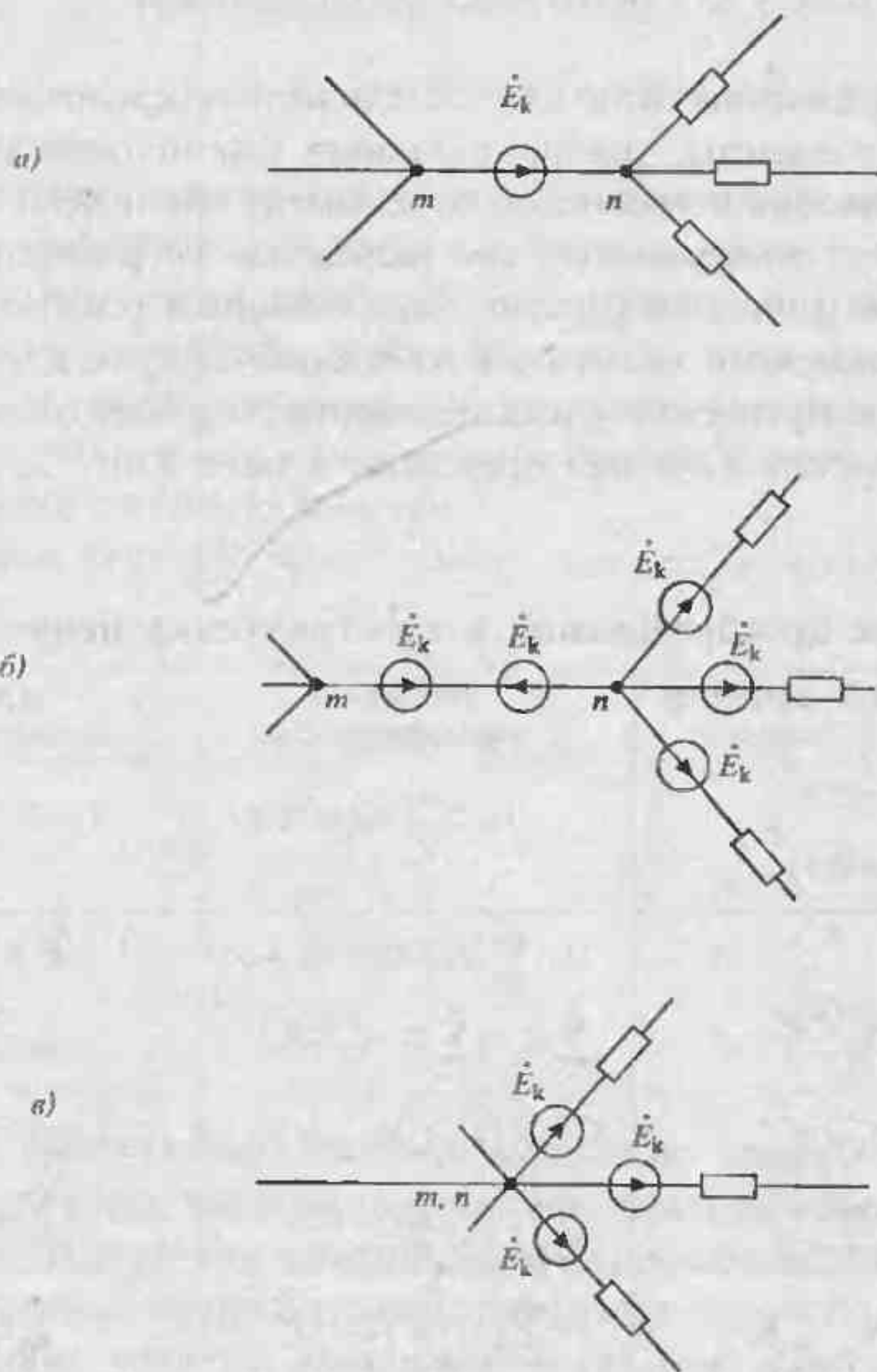


Рис. 20. 6. Исходная схема с идеальным источником напряжения (а), включение дополнительных источников (б) и эквивалентная схема (в)

Аналогично, наличие в схеме идеальных источников тока, включенных в контур, приводит к понижению порядка системы уравнений Кирхгофа за счет исключения контуров с известным током. Так, если в k -й ветви включен идеальный источник тока \dot{J}_k с проводимостью $Y_k = Z_k^{-1} = 0$, как показано на

рис. 20.7, а, то ветвь с идеальным источником тока исключается, а в каждую из ветвей, образующих замкнутый путь между узлами m и n , включаются источники тока, как показано на рис. 20.7, б. При такой замене режим цепи не изменяется, так как токи в промежуточных узлах взаимно компенсируются.

Эквивалентные преобразования позволяют упростить граф и понизить порядок дифференциального уравнения электрической цепи. Порядок дифференциального уравнения определяется числом реактивных элементов в цепи, однако не всегда он равен числу реактивных элементов. Для определения порядка n дифференциального уравнения необходимо исключить последовательное или

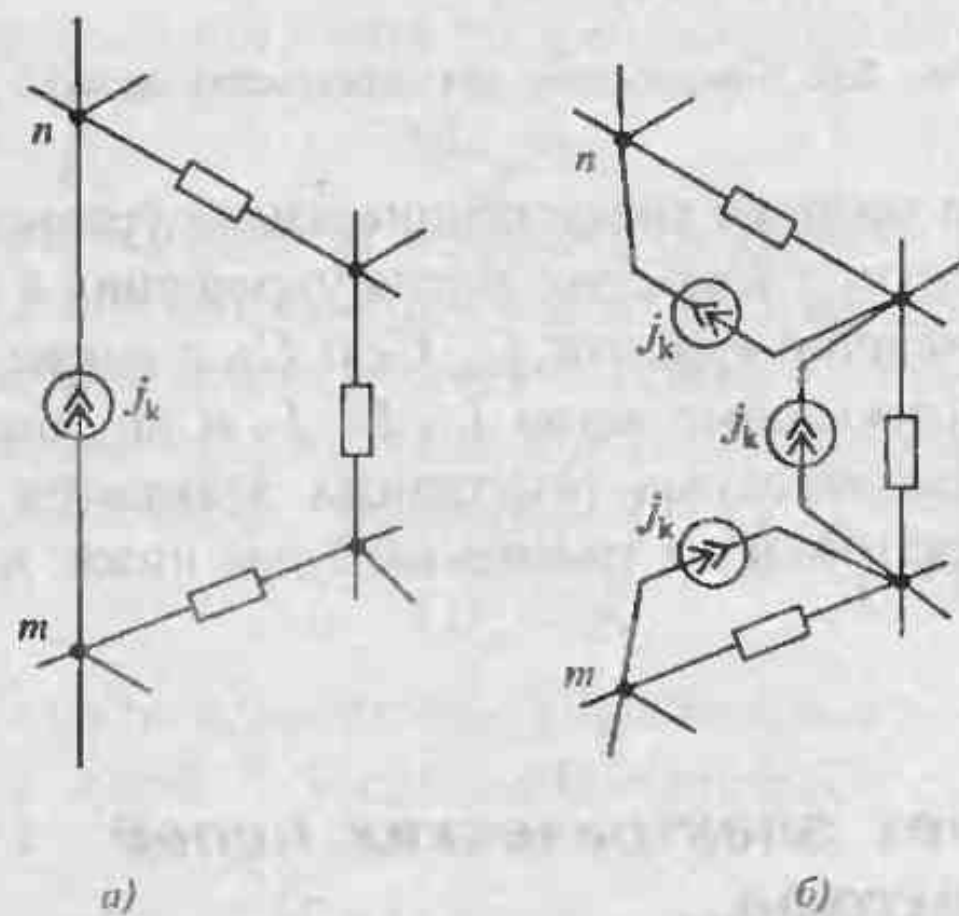


Рис. 20.7. Исходная схема с идеальным источником тока (а) и эквивалентная схема (б)

параллельное соединение однородных реактивных элементов в ветвях цепи, заменив их эквивалентными индуктивностями и емкостями.

Кроме того, следует установить наличие в схеме замкнутых контуров, состоящих из одних емкостей или из емкостей и источников напряжения, а также узлов (или сечений), в которых стягиваются ветви, содержащие только индуктивности или индуктивности и источники тока. Дело в том, что такие размещения реактивных элементов делают начальные значения $u_c(0)$ и $i_L(0)$ взаимно зависимыми, так как суммарные токи в узлах и напряжения в контурах должны подчиняться уравнениям Кирхгофа, а следовательно, приводят к понижению порядка уравнения цепи.

В качестве примера рассмотрим схему, изображенную на рис. 20.8. В этой схеме десять реактивных элементов: пять емкостей $C_1', C_1'', C_2', C_2'', C_3$ и пять индуктивностей $L_1, L_2', L_2'', L_3', L_3''$. Граф этой цепи можно упростить, если объединить последовательно и параллельно включенные элементы. В результате эквивалентные параметры ветвей будут иметь значения $C_1 = C_1' + C_1'', L_2 = L_2' + L_2'', C_2 = C_2' C_2'' / (C_2' + C_2''), L_3 = L_3' L_3'' / (L_3' + L_3'')$.

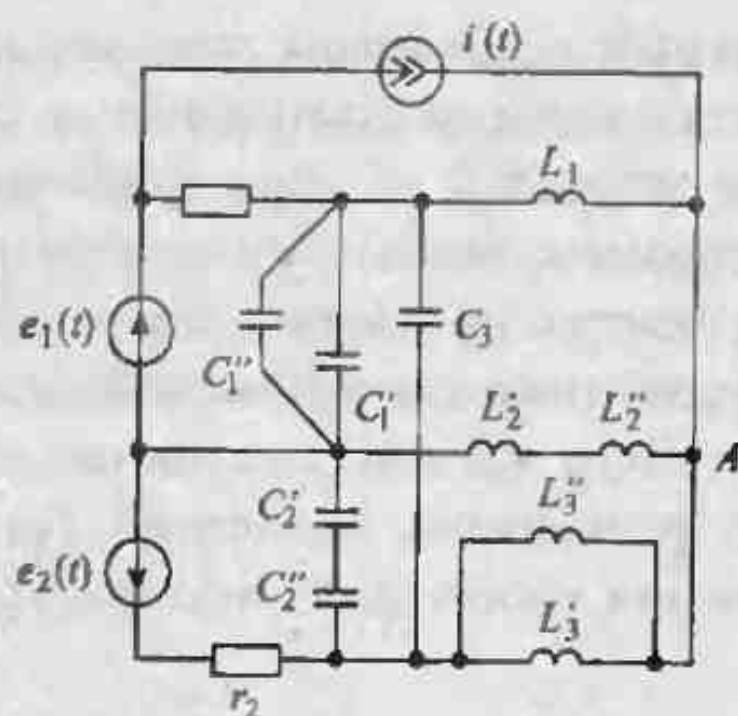


Рис. 20.8. Пример цепи для определения порядка ДУ

Для определения порядка дифференциального уравнения цепи, изображенной на рис. 20.8, следует учесть, что после упрощения в схеме окажется емкостный контур, содержащий емкости C_1 , C_2 и C_3 , а также будет один узел A , в котором сходятся индуктивные ветви L_1 , L_2 , L_3 и источник тока $i(t)$. Следовательно, при числе приведенных реактивных элементов в цепи $n_L + n_C = 6$ порядок ее дифференциального уравнения будет ниже: $n = 6 - 2 = 4$.

Лекция 21. Расчет электрических цепей по законам Кирхгофа

Уравнения Кирхгофа имеют универсальный характер и справедливы при любых видах воздействий и любых элементах, включенных в ветвях, как линейных, так и нелинейных. Так как уравнения Кирхгофа зависят лишь от способа соединения элементов схемы друг с другом, т. е. от топологии схемы, то их принято называть **топологическими**.

Уравнения Кирхгофа можно записать в матричной форме, используя матрицы узловых, контурных или сечений. Для этого токи \dot{I}_n и напряжения \dot{U}_n ветвей записывают в виде столбцов (столбцовых матриц):

$$\dot{I}_n = \begin{matrix} \text{Ветви} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{matrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_n \end{bmatrix}; \quad \dot{U}_n = \begin{matrix} \text{Ветви} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{matrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{U}_n \end{bmatrix}$$

Так как элементы строки узловой матрицы \mathbf{A} содержат сведения о ветвях, связанных с узлами цепи, и отражают направления токов в этих узлах, то сумма произведений элементов каждой строки на токи соответствующих ветвей представляет собой *первое уравнение Кирхгофа* и, следовательно,

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{I}}_b = 0. \quad (21.1)$$

При составлении (21.1) учитывалось, что произведение прямоугольной матрицы \mathbf{A} на столбцовую $\dot{\mathbf{I}}_b$ дает столбцовую матрицу, элементы которой равны сумме произведений элементов строки матрицы \mathbf{A} на элементы столбца матрицы $\dot{\mathbf{I}}_b$.

Аналогично может быть представлено *второе уравнение Кирхгофа*

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}_b = 0, \quad (21.2)$$

так как элементы строки матрицы \mathbf{B} содержат сведения о ветвях, связанных с контурами цепи, и отражают направления напряжений на этих ветвях. Уравнения (21.1) и (21.2) представляют собой уравнения Кирхгофа в матричной форме.

Для обобщенных узлов, какими являются сечения, можно записать *первое уравнение Кирхгофа*, аналогичное уравнению (21.1):

$$\mathbf{Q}\dot{\mathbf{I}}_b = 0. \quad (21.3)$$

В нем учитывается, что алгебраическая сумма токов в любом сечении электрической цепи равна нулю, а узел рассматривается как частный случай сечения.

Топологические матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{Q} можно также использовать для определения напряжений и токов ветвей по известным узловым напряжениям и контурным токам.

Узловое напряжение U_n определяется как напряжение между i -м независимым и базисным узлами цепи. Число узловых напряжений равно числу независимых узлов цепи. Столбцы узловой матрицы \mathbf{A} содержат информацию о том, между какими узлами включена i -я ветвь и как она направлена. Если умножить элементы матрицы \mathbf{A} на соответствующие узловые напряжения и сложить, то в результате получатся напряжения на отдельных ветвях.

Представим узловые напряжения цепи в виде столбца (столбцовой матрицы) — вектора узловых напряжений:

$$\dot{\mathbf{U}}_y = \begin{matrix} \text{Узлы} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{matrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{11} \\ \dot{U}_{22} \\ \vdots \\ \dot{U}_{nn} \end{bmatrix}. \quad (21.3a)$$

Тогда, умножая транспонированную узловую матрицу \mathbf{A}^t (т. е. матрицу \mathbf{A} , в которой строки заменены столбцами) на матрицу узловых напряжений, получим напряжения на ветвях. Следовательно, окончательно находим

$$\mathbf{A}^t \dot{\mathbf{U}}_y = \dot{\mathbf{U}}_в. \quad (21.4)$$

Контурные токи \dot{I}_k определяют, как токи в независимых контурах, направления которых совпадают с направлениями обхода контуров. Столбцы контурной матрицы \mathbf{B} содержат информацию о контурах, в которые входит i -я ветвь, и их взаимных направлениях. Поскольку, как указывалось ранее, любая ветвь цепи может входить не более чем в два контура с противоположными направлениями обхода, естественно, что ток любой ветви определяется разностью составляющих контурных токов. Однако если один из составляющих контуров является базисным, то ток в ветви совпадет с соответствующим контурным током. Таким образом, если умножить элементы столбца матрицы \mathbf{B} на соответствующие контурные токи и сложить, то получим токи в отдельных ветвях.

Представим контурные токи в виде столбцовой матрицы:

$$\dot{\mathbf{I}}_к = \begin{matrix} & \text{Контур} \\ & 1 \\ & 2 \\ & \vdots \\ & n \end{matrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{11} \\ \dot{I}_{22} \\ \vdots \\ \dot{I}_{nn} \end{bmatrix}, \quad (21.5)$$

Тогда, умножая транспонированную контурную матрицу \mathbf{B}^t (т. е. матрицу \mathbf{B} , в которой строки заменены столбцами) на матрицу контурных токов $\dot{\mathbf{I}}_к$, получим токи в ветвях:

$$\mathbf{B}^t \dot{\mathbf{I}}_к = \dot{\mathbf{I}}_в. \quad (21.5a)$$

Аналогично, столбцы матрицы сечений \mathbf{Q} содержат информацию о ветвях дерева, входящих в сечения. Если умножить элементы столбца матрицы сечений \mathbf{Q} на соответствующие напряжения ветвей дерева $\dot{\mathbf{U}}_д$ и сложить, то можно напряжения всех ветвей (включая ветви связи) выразить через напряжения ветвей дерева:

$$\mathbf{Q}^t \dot{\mathbf{U}}_д = \dot{\mathbf{U}}_в. \quad (21.6)$$

Из (21.6) следует, что если ветвь связи входит в состав только одного сечения, то на ней будет то же напряжение, что и на ветви дерева данного сечения. Если же ветвь связи входит в несколько сечений, то напряжение на ней равно алгебраической сумме напряжений ветвей дерева для этих сечений.

Пример 21.1. Для цепи, изображенной на рис. 21.1, а, построить топологический граф и записать топологические матрицы для уравнений Кирхгофа.

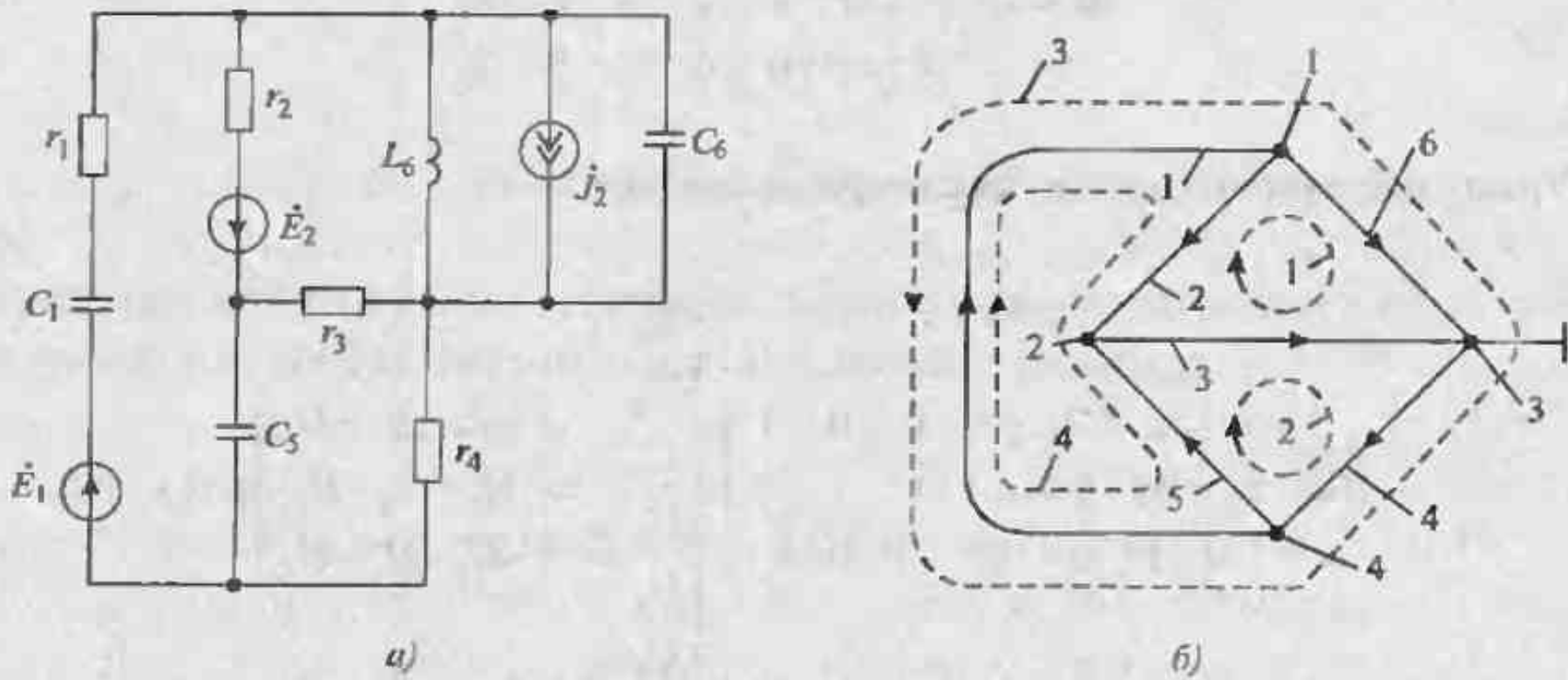


Рис. 21.1. Схема цепи (а) и ее топологический граф (б)

Решение. Объединяя последовательно соединенные элементы r_1 , C_1 , E_1 , параллельно соединенные элементы L_6 , C_6 , J_2 , последовательно соединенные элементы r_2 , E_2 и исключая элементы ветвей, получим граф, изображенный на рис. 21.1, б. Граф содержит шесть ветвей и четыре узла. Для составления узловой матрицы выберем узел 3 в качестве базисного, тогда

Ветви	1	2	3	4	5	6
Узлы						
	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{A} =$	$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$					

Уравнение первого закона Кирхгофа имеет вид

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_1 + i_2 + i_6 \\ -i_2 + i_3 - i_5 \\ +i_1 - i_4 + i_5 \end{bmatrix} = 0.$$

Для составления контурной матрицы выберем в качестве базисного контур 4, тогда

Ветви	1	2	3	4	5	6
Контур						
B = 1	0	-1	-1	0	0	1
2	0	0	1	1	1	0
4	-1	0	0	-1	0	-1

Уравнение второго закона Кирхгофа имеет вид

$$\mathbf{B}\dot{U}_n = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \\ \dot{U}_5 \\ \dot{U}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{U}_2 - \dot{U}_3 + \dot{U}_6 \\ \dot{U}_3 + \dot{U}_4 - \dot{U}_5 \\ -\dot{U}_1 - \dot{U}_4 - \dot{U}_6 \end{bmatrix} = 0.$$

Применение законов Кирхгофа для расчета электрических цепей. При расчете электрических цепей система уравнений (21.1), (21.2), составленных по законам Кирхгофа, дополняется n_n уравнениями напряжений (или токов) ветвей $u_n = f_1(i_n)$ или $i_n = f_2(u_n)$, вид которых определяется элементарным составом ветвей. Форма записи этих уравнений зависит от вида воздействий. В стационарном режиме при гармоническом воздействии используют комплексную форму записи уравнений ветвей $\dot{U}_n = f_1(\dot{I}_n)$ или $\dot{I}_n = f_2(\dot{U}_n)$. В переходном режиме при непериодическом воздействии используют операторную форму записи уравнений ветвей $U_n(s) = f_1[I_n(s)]$ и $I_n(s) = f_2[U_n(s)]$, в которых учитывают начальные запасы энергии в реактивных элементах ветвей.

Вид системы уравнений напряжений ветвей зависит от наличия в цепи управляемых источников и индуктивных связей между элементами различных ветвей. Рассмотрим электрическую цепь, не содержащую зависимых источников и индуктивных связей. Обобщенная ветвь такой цепи с последовательным включением элементов r_k, L_k, C_k, e_k и j_k приведенная на рис.21.2, описывается дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} u_k &= u_{Ck} + u_{ek} + u_{Lk} - e_k = \\ &= \frac{1}{C_k} \int_{-\infty}^t (i_k + j_k) dt + r_k (i_k + j_k) + L_k \frac{d(i_k + j_k)}{dt} - e_k. \end{aligned} \quad (21.7)$$

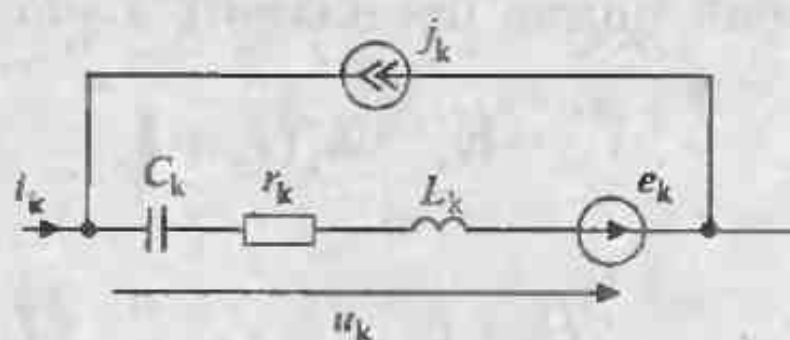


Рис. 21.2. Схема обобщенной ветви

При апериодических воздействиях, заданных в операторной форме, можно воспользоваться операторными моделями элементов, тогда

$$U_k(s) = \left(\frac{1}{sC_k} + r_k + sL_k \right) [I_k(s) + J_k(s)] - E_k(s) + \frac{u_{Ck}(0)}{s} - L_k [i_k(0) + j_k(0)].$$

Обозначая сумму операторных сопротивлений

$$Z_k(s) = 1/(sC_k) + r_k + sL_k, \quad (21.8)$$

получим уравнение k -й ветви в операторной форме:

$$U_k(s) + E_k(s) - \frac{u_{Ck}(0)}{s} + L_k [i_k(0) + j_k(0)] = Z_k(s) [I_k(s) + J_k(s)]. \quad (21.9)$$

При гармонических воздействиях, используя модели элементов в комплексной форме, находим

$$\dot{U}_k + \dot{E}_k = Z_k(\dot{I}_k + \dot{J}_k), \quad (21.10)$$

где $Z_k = r_k + j\omega L_k + 1/(j\omega C_k)$ — комплексное сопротивление ветви.

Если схема состоит из n ветвей, то можно записать систему комплексных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 + \dot{E}_1 = Z_1(\dot{I}_1 + \dot{J}_1), \\ \dot{U}_2 + \dot{E}_2 = Z_2(\dot{I}_2 + \dot{J}_2), \\ \dots \\ \dot{U}_n + \dot{E}_n = Z_n(\dot{I}_n + \dot{J}_n). \end{cases}$$

Эту систему уравнений можно представить в матричной форме:

$$\dot{\mathbf{U}}_в + \dot{\mathbf{E}}_в = \mathbf{Z}_в (\dot{\mathbf{I}}_в + \dot{\mathbf{J}}_в), \quad (21.11)$$

где

$$\dot{\mathbf{U}}_в + \dot{\mathbf{E}}_в = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 + \dot{E}_1 \\ \dot{U}_2 + \dot{E}_2 \\ \dots \\ \dot{U}_n + \dot{E}_n \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{I}}_в + \dot{\mathbf{J}}_в = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 + \dot{J}_1 \\ \dot{I}_2 + \dot{J}_2 \\ \dots \\ \dot{I}_n + \dot{J}_n \end{bmatrix}$$

— столбцовые матрицы напряжений и токов ветвей;

$$\mathbf{Z}_в = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & Z_2 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots Z_n \end{bmatrix} \quad (21.12)$$

— диагональная матрица сопротивлений ветвей.

Модель ветви с комплексным сопротивлением Z_k приведена на рис.21.3.

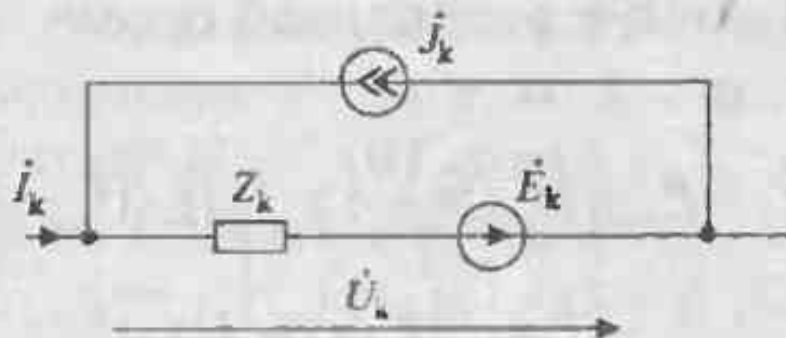


Рис. 21.3. Модель обобщенной ветви в комплексной форме

Уравнение (21.11) может быть решено относительно токов ветвей. Для этого умножим левую часть (21.11) на обратную матрицу сопротивлений ветвей (21.12), тогда

$$\mathbf{Y}_в (\dot{\mathbf{U}}_в + \dot{\mathbf{E}}_в) = \dot{\mathbf{I}}_в + \dot{\mathbf{J}}_в, \quad (21.13)$$

где $\mathbf{Y}_в = \mathbf{Z}_в^{-1}$ — матрица комплексных проводимостей ветвей ($\mathbf{Z}_в^{-1} \mathbf{Z}_в = \mathbf{1}$).

Для обратимых электрических цепей матрица проводимостей ветвей является диагональной, так как обратная ей матрица (21.12) также является диагональной с элементами, обратными соответствующим сопротивлениям ветвей:

$$Y_n = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & Y_2 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots Y_n \end{bmatrix}, \quad (21.14)$$

где $Y_k = 1/Z_k$ — проводимости ветвей ($k = 1, 2, \dots, n$).

- Таким образом, для электрических цепей без зависимых источников и взаимных индуктивностей между ветвями матрицы сопротивлений и проводимостей ветвей являются диагональными, а их элементы — взаимно обратными величинами.

Если электрическая цепь кроме элементов r, L, C содержит индуктивно-связанные ветви и зависимые источники тока и напряжения, то матрицы Z_n и Y_n будут недиагональными, так как напряжения и токи одних ветвей зависят от напряжений и токов других ветвей, что связано с действием управляемых источников и индуктивных связей между ветвями.

Матрица проводимостей ветвей Y_n необратимой электрической цепи также является обратной матрице Z_n сопротивлений ветвей, однако она является недиагональной, а ее элементы определяются по общим правилам обращения матриц:

$$Y_n = Z_n^{-1} = \frac{\Delta_{z_{ij}}^r}{\Delta_z}, \quad (21.15)$$

где $\Delta_z = \begin{bmatrix} Z_{n11} & Z_{n12} & \dots & Z_{n1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{nn1} & Z_{nn2} & \dots & Z_{nnn} \end{bmatrix}$ — определитель матрицы сопротивлений ветвей;

$\Delta_{z_{ij}}$ — алгебраическое дополнение к определителю Δ_z , получаемое из него при вычеркивании i -й строки, j -го столбца и умножения на $(-1)^{i+j}$;

$\Delta_{z_{ij}}^r$ — транспонированная матрица алгебраических дополнений.

Так, для матрицы $Z_n = \begin{bmatrix} Z_{n11} & Z_{n12} \\ Z_{n21} & Z_{n22} \end{bmatrix}$

получаем

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} Z_{n11} & Z_{n12} \\ Z_{n21} & Z_{n22} \end{vmatrix} = Z_{n11}Z_{n22} - Z_{n12}Z_{n21}; \quad \Delta_{z11} = (-1)^2 Z_{n22} = Z_{n22},$$

$$\Delta_{z12} = (-1)^3 Z_{n21} = -Z_{n21}; \quad \Delta_{z21} = (-1)^4 Z_{n11} = Z_{n11}.$$

Таким образом, матрица проводимостей ветвей

$$Y_{\text{в}} = \frac{1}{Z_{\text{в}11} Z_{\text{в}22} - Z_{\text{в}21} Z_{\text{в}12}} \begin{bmatrix} Z_{\text{в}22} & -Z_{\text{в}12} \\ -Z_{\text{в}21} & Z_{\text{в}11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{\text{в}11} & Y_{\text{в}12} \\ Y_{\text{в}21} & Y_{\text{в}22} \end{bmatrix}.$$

Пример 21.2. Составить уравнения напряжений ветвей в матричной форме для цепи, изображенной на рис. 21.4, если воздействие задано апериодической функцией.

Решение. Используя (21.9) для обобщенной ветви, запишем систему уравнений в операторной форме для напряжений на ветвях схемы, представленной на рис. 21.4:

$$U_1(s) = (r_1 + sL_1)[I_1(s) + J_1(s)] - L_1[i_1(0) + j_1(0)];$$

$$U_2(s) = \left(r_2 + \frac{1}{sC_2} \right) I_2(s) + \frac{u_{C_2}(0)}{s};$$

$$U_3(s) = \left(r_3 + \frac{1}{sC_3} \right) I_3(s) + E_3(s) + \frac{u_{C_3}(0)}{s};$$

$$U_4(s) = r_4[I_4(s) + J_4(s)] - E_4(s);$$

$$U_5(s) = r_5 I_5(s).$$

Уравнения в матричной форме имеют вид

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \\ U_4(s) \\ U_5(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + sL_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 + \frac{1}{sC_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 + \frac{1}{sC_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) + J_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \\ I_4(s) + J_4(s) \\ I_5(s) \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -E_3(s) \\ E_4(s) \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 0 \\ u_{C_2}(0) \\ u_{C_3}(0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(0) + j_1(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

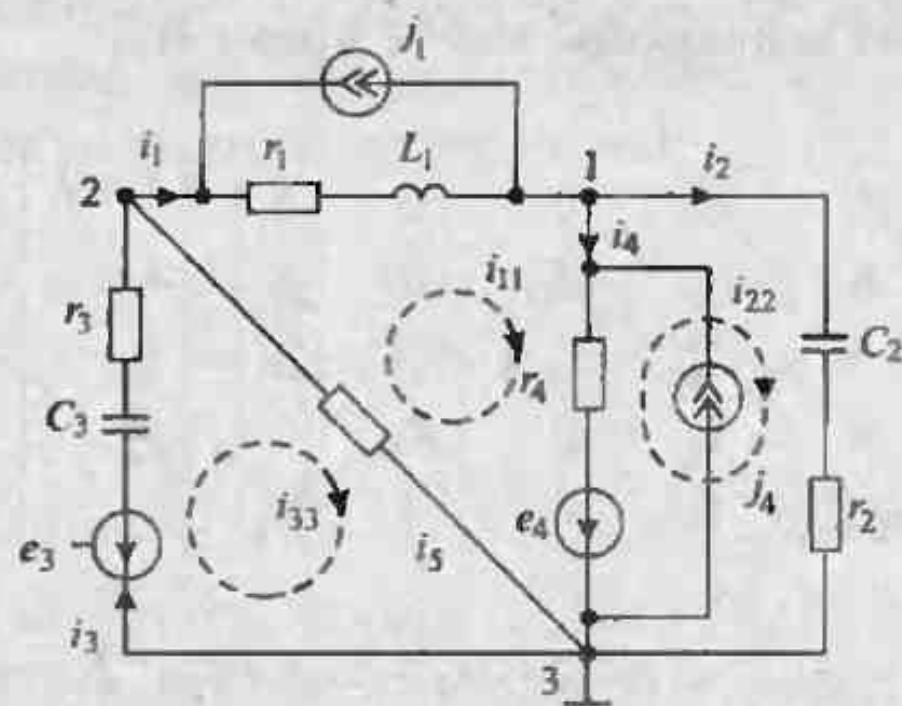


Рис. 21.4. Схема цепи к примеру 21.2.

Пример 21.3. Составить уравнения напряжений и токов ветвей в комплексной форме для схемы с индуктивными связями и зависимыми источниками, представленной на рис.21.5,а.

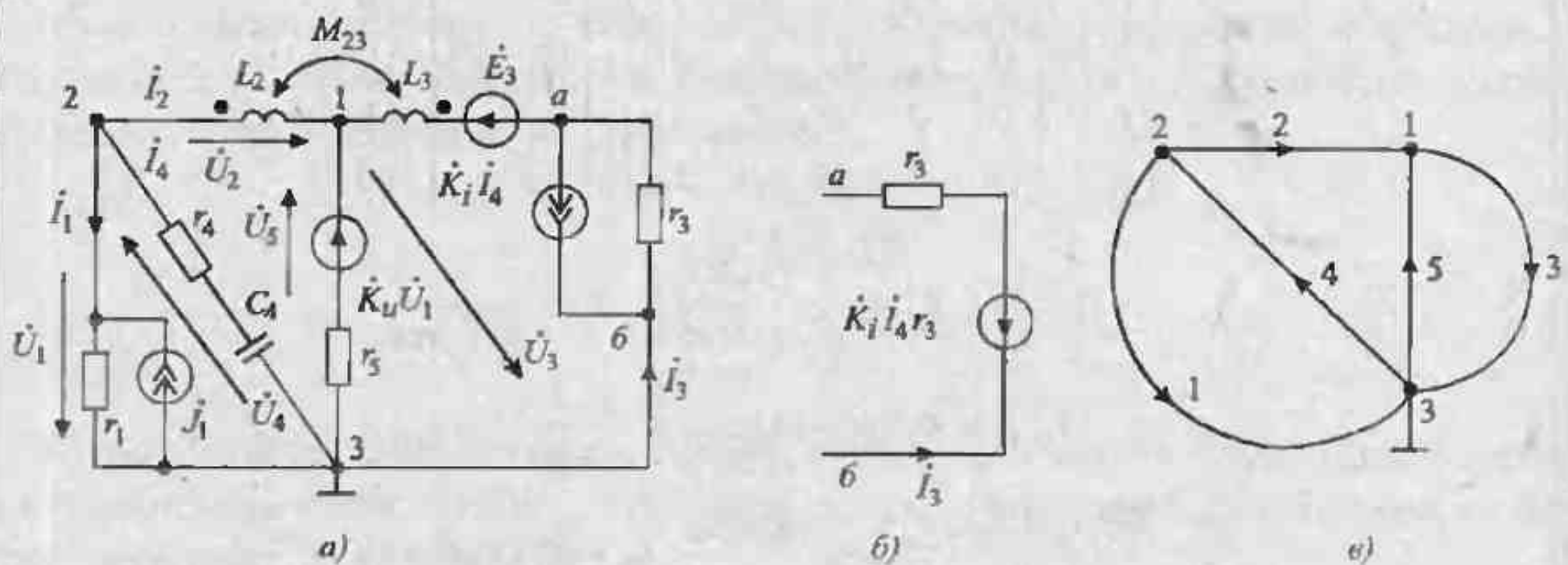


Рис. 21.5. Схема цепи к примеру 21.3 (а), эквивалентная схема (б) и топологический граф (в)

Решение. Предварительно преобразуем управляемый источник тока $K_1 i_4$ в эквивалентный источник напряжения, как показано на рис.21.5, б. В результате получим граф цепи, изображенный на рис.21.5, в. Используя уравнение обобщенной ветви (21.10), запишем уравнения напряжений на ветвях:

$$\dot{U}_1 = r_1 (\dot{I}_1 + \dot{J}_1),$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M_{23} \dot{I}_3,$$

$$\dot{U}_3 = (r_3 + j\omega L_3) \dot{I}_3 - j\omega M_{23} \dot{I}_2 - r_3 K_1 \dot{I}_4 + \dot{E}_3,$$

$$\dot{U}_4 = [r_4 + 1/(j\omega C_4)] \dot{I}_4,$$

$$\dot{U}_5 = r_5 \dot{I}_5 - r_1 K_u (\dot{I}_1 + \dot{J}_1).$$

Матричные уравнения напряжений ветвей имеют вид

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \\ \dot{U}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & -Z_M & 0 & 0 \\ 0 & -Z_M & Z_3 & -r_3 K_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 \\ -r_1 K_1 & 0 & 0 & 0 & Z_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 + \dot{J}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{E}_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $Z_1 = r_1$; $Z_2 = jx_2 = j\omega L_2$; $Z_3 = r_3 + jx_3 = r_3 + j\omega L_3$; $Z_4 = r_4 - jx_4 = r_4 - j/(\omega C_4)$; $Z_5 = r_5$; $Z_M = jx_M = j\omega M_{23}$.

Определяя матрицу проводимостей ветвей по (21.15), запишем уравнения токов ветвей:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & 0 \\ 0 & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_{44} & 0 \\ Y_{51} & 0 & 0 & 0 & Y_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 - \dot{E}_3 \\ \dot{U}_4 \\ \dot{U}_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{J}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_{11} = 1/r_1; Y_{22} = \frac{1}{jx_2} \frac{(x_M/x_2)^2}{r_3 + j\sigma x_3}; Y_{33} = \frac{1}{r_3 + j\sigma x_3};$$

$$Y_{44} = 1/Z_4; Y_{55} = 1/r_5; Y_{23} = \frac{x_M/x_2}{r_3 + j\sigma x_3} = Y_{32};$$

$$Y_{24} = \frac{r_3 K_1 x_M / Z_4 x_2}{r_3 + j\sigma x_3}; Y_{34} = \frac{r_3 K_1 / Z_4}{r_3 + j\sigma x_3}; Y_{51} = K_1 / r_5; \sigma = 1 - \frac{x_M^2}{x_2 - x_3}.$$

Очевидно, что матрица проводимостей ветвей является недиагональной, а ее элементы не могут быть определены как величины, обратные комплексным сопротивлениям ветвей. Недиагональные элементы в матрице Y_n появляются в строках, соответствующих ветвям, в которых имеются зависимые источники и индуктивно связанные катушки, и в столбцах соответствующих ветвям, токи и напряжения которых управляют работой зависимых источников.

Уравнения напряжений и токов ветвей. При расчете электрической цепи токи и напряжения всех ветвей определяют путем решения системы n_b уравнений, составленных по законам Кирхгофа. При этом число уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, равно числу независимых узлов, а по второму закону Кирхгофа — числу независимых контуров. Кроме того, поскольку уравнения Кирхгофа составляют для различных переменных (по первому зако-

ну — для токов, а по второму — для напряжений ветвей), уравнения Кирхгофа дополняют n_b уравнениями ветвей. Таким образом, полная система уравнений, составляемых по законам Кирхгофа, имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n_{\text{уз}}} i_k = 0; \sum_{k=1}^{n_{\text{вет}}} u_k = 0; \\ u_k = f_1(i_k) \text{ или } i_k = f_2(u_k). \quad (21.16)$$

Если общее число ветвей схемы n_b , то (21.16) должна содержать $2n_b$ уравнений, из которых n_b уравнений ветвей и топологических уравнений. Поскольку число уравнений получится довольно большим, желательно уменьшить количество уравнений путем исключения части переменных или введением вспомогательных переменных. Каждый из этих способов порождает свой метод расчета.

Для сокращения числа переменных можно использовать методы токов и напряжений ветвей.

Метод токов ветвей основан на использовании уравнений Кирхгофа, в которые подставлены уравнения напряжений ветвей $u_k = f_1(i_k)$. Система уравнений токов ветвей содержит n_b уравнений:

$$\begin{cases} \sum i_k = 0, \\ \sum f_1(i_k) = 0 \end{cases} \quad (21.17)$$

Метод напряжений ветвей основан на использовании уравнений Кирхгофа и уравнений токов ветвей $i_k = f_2(u_k)$. Система уравнений напряжений ветвей также содержит n_b уравнений:

$$\begin{cases} \sum u_k = 0, \\ \sum f_2(u_k) = 0 \end{cases} \quad (21.18)$$

При гармонических воздействиях в комплексной форме для получения уравнений токов ветвей необходимо использовать первое уравнение Кирхгофа (21.1), а во втором уравнении (21.2) напряжения ветвей выразить через токи, используя (21.11), тогда

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{I}}_b = 0, \\ \mathbf{BZ}_b(\dot{\mathbf{I}}_b + \dot{\mathbf{J}}_b) = \mathbf{B}\dot{\mathbf{E}}_b. \quad (21.19)$$

Для получения уравнений напряжений ветвей необходимо использовать второе уравнение Кирхгофа (21.2), а в первом уравнении (21.1) заменить токи ветвей напряжениями, используя (21.13), тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\dot{U}_b &= 0, \\ \mathbf{A}\mathbf{Y}_b(\mathbf{U}_b + \mathbf{E}_b) &= \mathbf{A}\mathbf{J}_b. \end{aligned} \quad (21.20)$$

Дальнейшее понижение числа уравнений достигается введением новых переменных — узловых напряжений или контурных токов.

Лекция 22. Расчет электрических цепей методом узловых напряжений

Использование узловых напряжений позволяет сократить порядок системы уравнений цепи на число независимых контуров. С этой целью определим напряжение на ветви через разность узловых напряжений, как показано на рис.22.1:

$$u_{ij} = u_i - u_j, \quad (22.1)$$

где u_{ij} — напряжение на ветви; u_i и u_j — узловые напряжения между i -м и j -м узлами цепи.

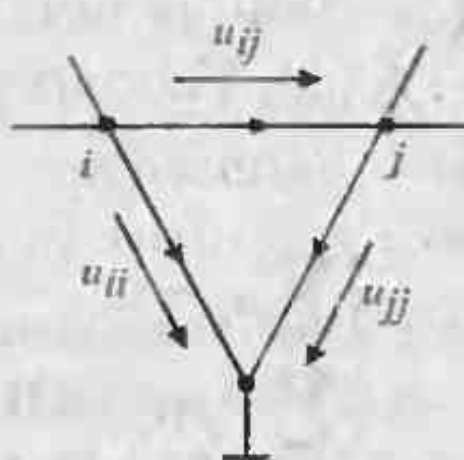


Рис. 22.1. Определение узловых напряжений

Если подставить значения напряжений ветвей (22.1) в (21.18), то первое уравнение обратится в тождественный нуль, так как при обходе замкнутого контура каждое узловое напряжение войдет в уравнение дважды (один раз со знаком плюс, а другой — со знаком минус) и $\sum (u_i - u_j) \equiv 0$.

Благодаря этому порядок системы уравнений, используемых для расчета цепи, понижается на число контурных уравнений, а второе уравнение для системы (21.18) $n_{ny} = n_y - 1$ независимых узлов принимает вид

$$\sum f_2(u_{ii} - u_{jj}) = 0. \quad (22.2)$$

Расчет электрической цепи методом узловых напряжений выполняют по следующей схеме: определяют узловые напряжения, характеризуемые вектором $\dot{U}_y = [\dot{U}_{11}, \dot{U}_{22}, \dots, \dot{U}_{nn}]^T$; по узловым напряжениям рассчитывают токи в ветвях \dot{I}_b .

Вывод уравнений узловых напряжений. При гармонических воздействиях, заданных в комплексной форме, можно использовать только второе уравнение системы (21.20), заменив в нем напряжения ветвей узловыми напряжениями. Для этого запишем (21.20) в виде

$$A Y_b \dot{U}_b = A \dot{J}_b - A Y_b \dot{E}_b$$

и подставим в него значение (21.4), тогда

$$A Y_b A^T \dot{U}_b = A (\dot{J}_b - Y_b \dot{E}_b), \quad (22.3)$$

где произведение $A Y_b A^T$ имеет размерность проводимости и называется **матрицей узловых проводимостей**, а произведение $A (\dot{J}_b - Y_b \dot{E}_b)$ имеет размерность тока и называется **матрицей задающих узловых токов**.

Уравнение (22.3) называется уравнением узловых напряжений и в окончательном виде

$$Y_y \dot{U}_y = \dot{J}_y, \quad (22.4)$$

где $Y_y = A Y_b A^T$ — матрица узловых проводимостей;

$\dot{J}_y = A (\dot{J}_b - Y_b \dot{E}_b)$ — матрица задающих узловых токов.

Запишем (22.4) в развернутой форме:

$$\begin{cases} \dot{U}_{11} Y_{11} + \dot{U}_{22} Y_{22} + \dots + \dot{U}_{n_1 n_1} Y_{1 n_1} = \dot{J}_{11}, \\ \dot{U}_{11} Y_{21} + \dot{U}_{22} Y_{22} + \dots + \dot{U}_{n_1 n_1} Y_{2 n_1} = \dot{J}_{22}, \\ \dots \\ \dot{U}_{11} Y_{n_1 1} + \dot{U}_{22} Y_{n_1 2} + \dots + \dot{U}_{n_1 n_1} Y_{n_1 n_1} = \dot{J}_{n_1 n_1}. \end{cases}$$

Проанализируем структуру матриц Y_y и \dot{J}_y .

Составление матрицы узловых проводимостей. Матрица узловых проводимостей

$$\mathbf{Y}_y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n_d} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2n_d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{n_d 1} & Y_{n_d 2} & \dots & Y_{n_d n_d} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{Y}_b \mathbf{A}^T \quad (22.4a)$$

является определенной квадратной матрицей порядка $n_d = n_y - 1$. Ее диагональные элементы $Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{n_d n_d}$ положительны и представляют собой собственные проводимости всех ветвей с учетом индуктивных связей между ветвями, стягивающимися в этих узлах.

Внедиагональные элементы $Y_{12}, Y_{13}, \dots, Y_{ij}, \dots$ представляют собой межузловые проводимости соответствующих узлов. В них учитываются проводимости ветвей, присоединенных к паре узлов, соответственно 1-2; 1-3, ..., $i-j$, ..., с учетом действия индуктивных связей и зависимых источников.

В общем случае матрица \mathbf{Y}_y определяется через узловую матрицу и матрицу проводимостей ветвей (21.15). Однако для обратимых цепей без взаимных индуктивностей ее легко составить непосредственно по схеме электрической цепи. При этом для обратимых цепей матрица \mathbf{Y}_y симметрична, и $Y_{12} = Y_{21}$, $Y_{13} = Y_{31}$, ..., $Y_{ij} = Y_{ji}$, ...

Матрица узловых проводимостей характеризует структуру и элементный состав электрической цепи (кроме воздействий), поэтому если составить матрицу операторных узловых проводимостей

$$\mathbf{Y}_y(s) = \mathbf{A} \mathbf{Y}_b(s) \mathbf{A}^T$$

и приравнять ее определитель к нулю, то получим характеристическое уравнение цепи, определяющее законы изменения составляющих реакций цепи:

$$\Delta_y(s) = |\mathbf{Y}_y(s)| = 0. \quad (22.5)$$

Матрица задающих узловых токов \mathbf{J}_y представляет собой столбцовую матрицу — n_d -мерный вектор:

$$\mathbf{J}_y = [j_{11}, j_{22}, \dots, j_{n_d n_d}]^T. \quad (22.6)$$

Каждый элемент этого вектора \dot{J}_i учитывает действие (с учетом знака) всех независимых источников тока и напряжения в ветвях, стягивающихся к i -му узлу, с учетом действия индуктивных связей между ними.

В общем случае матрица \mathbf{J}_y выражается через узловую матрицу \mathbf{A} , матрицу \mathbf{Y}_b проводимостей ветвей и векторы независимых источников тока \mathbf{J}_b и напряжений \mathbf{E}_b ветвей. Для обратимых цепей без взаимных индуктивностей между ветвями вектор \mathbf{J}_y легко определить по виду схемы.

Таким образом, задача анализа установившихся режимов в цепи с помощью метода узловых напряжений сводится к решению системы n_d алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами при постоянных воздействиях или с комплексными коэффициентами (22.4, а) при гармонических воздействиях, записанных в комплексной форме.

Решение системы узловых уравнений (22.4) относительно вектора узловых напряжений, как известно из матричной алгебры, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}_y &= [\dot{U}_{11}, \dot{U}_{22}, \dots, \dot{U}_{n_d n_d}]^T = [\mathbf{Y}_y]^{-1} [\mathbf{J}_y] = \\ &= \frac{1}{\Delta_y} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots & \Delta_{n_d 1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{n_d 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1 n_d} & \Delta_{2 n_d} & \dots & \Delta_{n_d n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{J}_{11} \\ \dot{J}_{11} \\ \dots \\ \dot{J}_{n_d n_d} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (22.7)$$

где $\Delta_y = |\mathbf{Y}_y|$ — определитель матрицы узловых проводимостей;

$\Delta_{11}, \Delta_{12}, \dots, \Delta_{ij}, \dots$ — алгебраические дополнения соответственно элементов $Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{ij}, \dots$ определителя Δ_y .

Раскрывая (22.7), получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{U}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_y} \dot{J}_{11} + \frac{\Delta_{21}}{\Delta_y} \dot{J}_{22} + \dots + \frac{\Delta_{n_d 1}}{\Delta_y} \dot{J}_{n_d n_d}, \\ \dots \\ \dot{U}_{ii} = \frac{\Delta_{1i}}{\Delta_y} \dot{J}_{11} + \frac{\Delta_{2i}}{\Delta_y} \dot{J}_{22} + \dots + \frac{\Delta_{n_d i}}{\Delta_y} \dot{J}_{n_d n_d}, \end{cases} \quad (22.8)$$

в которых слагаемые пропорциональны задающим узловым токам $\dot{J}_{11}, \dot{J}_{22}, \dots, \dot{J}_{n_d n_d}$, что соответствует принципу наложения.

Сомножители при задающих токах в узлах в уравнениях (22.8) имеют размерность сопротивлений, при этом $Z_{ij} = \Delta_{ij}/\Delta_y$ при $i = j$ называют **входным**, а при $i \neq j$ — **передаточным** сопротивлением холостого хода. Входное сопротивление определяют при условии, что все задающие токи в узлах, кроме J_{ii} , равны нулю:

$$Z_{ii} = \dot{U}_{ii} / J_{ii}. \quad (22.9)$$

Передаточное сопротивление Z_{ij} определяют как отношение напряжения \dot{U}_{ii} реакции в i -м узле к задающему току J_{jj} в j -м узле при условии, что все остальные задающие токи равны нулю:

$$Z_{ij} = \dot{U}_{ii} / J_{jj}. \quad (22.10)$$

Пример 22.1. Составить и решить в общем виде уравнения узловых напряжений для обратимой электрической цепи без взаимных индуктивностей (см. рис.21.4), считая все воздействия гармоническими, изменяющимися с частотой ω .

Решение. Примем узел 3 за базисный и запишем уравнения узловых напряжений для узлов 1 и 2 в матричной форме (22.4):

$$\mathbf{Y}_y \dot{\mathbf{U}}_y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{11} \\ \dot{U}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{j}_y = \begin{bmatrix} j_{11} \\ j_{22} \end{bmatrix}.$$

Определим матрицу узловых проводимостей $[\mathbf{Y}_y]$ по (22.4, а), где узловая матрица для схемы (см. рис. 21.12) имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

а матрица проводимостей ветвей

$$\mathbf{Y}_y = \begin{bmatrix} Y_{y1} & & & & \\ & Y_{y2} & & & \\ & & Y_{y3} & & 0 \\ & & & Y_{y4} & \\ & 0 & & & Y_{y5} \end{bmatrix}.$$

где $Y_{y1} = (r_1 + j\omega L_1)^{-1}$; $Y_{y2} = [r_2 + 1/(j\omega C_2)]^{-1}$; $Y_{y3} = [r_3 + 1/(j\omega C_3)]^{-1}$; $Y_{y4} = 1/r_4$; $Y_{y5} = 1/r_5$.

Согласно (22.4, а), матрица узловых проводимостей определяется выражением

$$\mathbf{Y}_y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{n1} & & & & \\ & Y_{n2} & & & \\ & & Y_{n3} & & \\ & & & Y_{n4} & \\ & & & & Y_{n5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix},$$

где $Y_{11} = Y_{n1} + Y_{n2} + Y_{n4}$; $Y_{12} = Y_{21} = -Y_{n1}$; $Y_{22} = Y_{n1} + Y_{n3} + Y_{n5}$.

Анализируя структуру полученной симметричной матрицы и сопоставляя ее со схемой (см. рис. 21.12), сформулируем правила ее составления.

Диагональные элементы матрицы Y_{11} и Y_{22} равны суммам проводимостей всех ветвей, сходящихся в соответствующем узле. Внедиагональные элементы $Y_{12} = Y_{21}$, равны сумме проводимостей ветвей, включенных между этими узлами, взятой со знаком минус.

Матрицу задающих узловых токов (22.6) определяем по формуле

$$\mathbf{J}_y = \mathbf{A}(\mathbf{J}_s - \mathbf{Y}_s \mathbf{E}_s) = \mathbf{A}\mathbf{J}_s - \mathbf{A}\mathbf{Y}_s \mathbf{E}_s,$$

где $\mathbf{J}_s = [J_1, 0, 0, J_4, 0]^T$ — столбцовая матрица задающих токов ветвей;

$\mathbf{E}_s = [0, 0, -\dot{E}_1, \dot{E}_4, 0]^T$ — столбцовая матрица задающих напряжений ветвей.

Согласно (22.6), матрица задающих узловых токов имеет вид

$$\mathbf{J}_y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ 0 \\ -Y_{n1} \dot{E}_1 \\ J_4 - Y_{n1} \dot{E}_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_1 + J_4 - Y_{n1} \dot{E}_4 \\ J_1 - Y_{n1} \dot{E}_1 \end{bmatrix}.$$

Анализируя структуру полученной матрицы задающих узловых токов и схему, изображенную на рис. 21.4, установим правила ее составления для цепей без взаимных индуктивностей.

Элементы матрицы задающих узловых токов равны сумме токов задающих источников ветвей, сходящихся в данном узле. При этом задающие токи ветвей, направленные к рассматриваемому узлу, берут со знаком плюс, а токи, направленные от узла, — со знаком минус.

Используя найденные матрицы узловых проводимостей и задающих узловых токов, запишем уравнения узловых напряжений в виде

$$\begin{bmatrix} Y_{u1} + Y_{u2} + Y_{u4} & -Y_{u1} \\ -Y_{u1} & Y_{u1} + Y_{u3} + Y_{u5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{11} \\ \dot{U}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_1 + j_4 - Y_{u4} \dot{E}_4 \\ j_1 - Y_{u3} \dot{E}_3 \end{bmatrix}.$$

Решение узловых уравнений найдем по (22.7). Определитель матрицы узловых проводимостей

$$\begin{aligned} \Delta_y &= \begin{vmatrix} Y_{u1} + Y_{u2} + Y_{u4} & -Y_{u1} \\ -Y_{u1} & Y_{u1} + Y_{u3} + Y_{u5} \end{vmatrix} = \\ &= (Y_{u1} + Y_{u2} + Y_{u4}) \times (Y_{u1} + Y_{u3} + Y_{u5}) - Y_{u1}^2. \end{aligned}$$

Алгебраические дополнения элементов определителя имеют такой вид:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= Y_{22}(-1)^2 = Y_{22}; & \Delta_{12} &= Y_{21}(-1)^3 = -Y_{21}; \\ \Delta_{21} &= Y_{12}(-1)^2 = Y_{12}; & \Delta_{22} &= Y_{11}(-1)^4 = Y_{11}. \end{aligned}$$

Искомые узловые напряжения найдем по (22.8):

$$\begin{aligned} \dot{U}_{11} &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta_y} j_{11} + \frac{\Delta_{21}}{\Delta_y} j_{22} = \frac{Y_{22}}{\Delta_y} j_{11} + \frac{Y_{12}}{\Delta_y} j_{22}, \\ \dot{U}_{22} &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta_y} j_{11} + \frac{\Delta_{22}}{\Delta_y} j_{22} = \frac{-Y_{21}}{\Delta_y} j_{11} + \frac{Y_{11}}{\Delta_y} j_{22}. \end{aligned}$$

Пример 22.2. Определить узловые напряжения для схемы с индуктивными связями и зависимыми источниками (см. рис. 21.5, а).

Решение. Составим узловую матрицу цепи (см. рис. 21.5, а) по графу (см. рис. 21.5, в) при условии, что узел 3 является базисным:

	Ветви	1	2	3	4	5
	Узлы					
$\mathbf{A} =$	1	0	-1	1	0	-1
	2	1	1	0	-1	0

Определим матрицу узловых проводимостей, используя матрицу проводимостей ветвей \mathbf{Y}_b , найденную в примере 21.3, по формуле

$$\mathbf{Y}_y = \mathbf{A} \mathbf{Y}_b \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix},$$

где $Y_{11} = Y_{u22} - Y_{u32} - Y_{u23} + Y_{u33} + Y_{u55}$; $Y_{22} = Y_{u11} + Y_{u22} - Y_{u24} + Y_{u44}$;
 $Y_{12} = -Y_{u51} - Y_{u22} + Y_{u32} + Y_{u24} - Y_{u34}$; $Y_{21} = Y_{u22} + Y_{u23}$.

Анализируя структуру матрицы узловых проводимостей, можно установить, что $Y_{12} \neq Y_{21}$, а узловые проводимости зависят не только от проводимостей ветвей,

входящих в узлы, но и от параметров передачи зависимых источников и индуктивно-связанных ветвей.

Определим матрицу задающих токов в узлах по формуле

$$\mathbf{J}_y = \mathbf{A}\mathbf{J}_s - \mathbf{A}\mathbf{Y}_s\mathbf{E}_s = \begin{bmatrix} j_{11} \\ j_{22} \end{bmatrix},$$

где $j_{11} = (Y_{33} - Y_{23})\dot{E}_3$; $j_{22} = j_1 + Y_{23}\dot{E}_3$.

Очевидно, что элементы матрицы узловых задающих токов определяются только параметрами независимых источников j_1 , \dot{E}_3 и параметрами индуктивно связанных ветвей 2 и 3.

Составим уравнения узловых напряжений, используя найденные матрицы \mathbf{Y}_y и \mathbf{J}_y :

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{11} \\ \dot{U}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} \\ j_{22} \end{bmatrix}.$$

Найдем матрицу узловых напряжений по (22.8):

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{11} \\ \dot{U}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} j_{11} \\ j_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_y} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{11} \\ j_{22} \end{bmatrix},$$

где $\Delta_{11} = Y_{22}$; $\Delta_{22} = Y_{11}$; $\Delta_{12} = -Y_{21}$; $\Delta_{21} = -Y_{12}$.

Раскрывая матричные уравнения узловых напряжений, найдем

$$U_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_y} j_{11} + \frac{\Delta_{21}}{\Delta_y} j_{22} = \frac{Y_{22}j_{11} - j_{22}Y_{12}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}},$$

$$\dot{U}_{22} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_y} j_{11} + \frac{\Delta_{22}}{\Delta_y} j_{22} = \frac{-j_{11}Y_{21} + j_{22}Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}.$$

Пример 22.3. Определить напряжение на нагрузке в схеме, изображенной на рис.22.2, а, с идеальным операционным усилителем ОУ, если напряжение источника задано единичной функцией $e(t) = \delta_1(t)$.

Решение. Составим операторную схему замещения (рис.22.2, б), используя схему замещения ОУ, где $g_{\text{вх}} = r_{\text{вх}} = 0$ и $A \rightarrow \infty$. Решение задачи выполним в операторной форме с использованием уравнений узловых напряжений, которые для схемы, изображенной на рис.22.2, б, имеют вид

$$\begin{cases} U_{11}(s)(g + sC) - U_{22}(s)sC = \frac{1}{s}g, \\ U_{22}(s) = -U_{11}(s)A. \end{cases}$$

В результате решения системы уравнений узловых напряжений найдем напряжение на нагрузке:

$$U_{22}(s) = \frac{-gA}{s[g + sC(1+A)]} = -\frac{g}{s^2 C}$$

Вычисляя обратное преобразование Лапласа, найдем мгновенное значение напряжения на нагрузке:

$$u_{\text{вых}} = u_{22}(t) = -gt / C.$$

Рассмотренная схема является интегратором, и при ступенчатом изменении напряжения на ее входе напряжение на выходе изменяется линейно во времени, как показано на рис. 22.2, в.

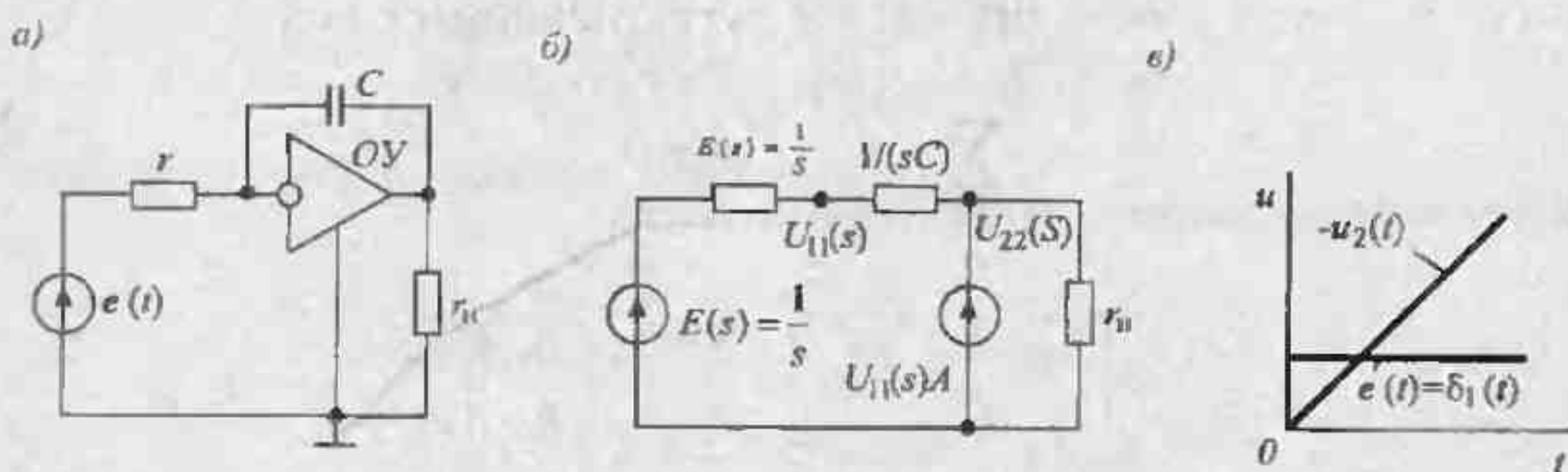


Рис. 22.2. Схема к примеру 22.3 (а); схема замещения (б) и график выходного напряжения (в)

Лекция 23. Расчет электрических цепей методом контурных токов

Использование контурных токов позволяет сократить порядок системы уравнений цепи на число независимых узлов. Определим ток в ветви через разность контурных токов, как показано на рис. 23.1:

$$i_{ij} = i_{ii} - i_{jj} \tag{23.1}$$

где i_{ij} — ток в ветви;

i_{ii} и i_{jj} — контурные токи в i -м и j -м контурах соответственно.

При подстановке значения токов ветвей (23.1) в (21.17) первое уравнение обращается в тождественный нуль, так как если контурный ток втекает в узел, то он же из него и вытекает, поэтому сумма контурных токов в узле всегда равна нулю независимо от числовых значений этих токов, в результате получаем $\sum (i_{ii} - i_{jj}) = 0$.

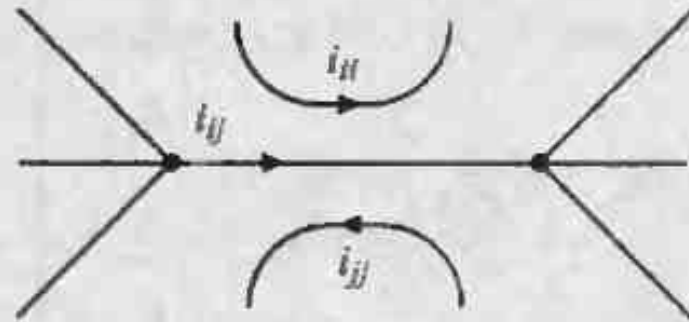


Рис. 23.1. Граф цепи с контурными токами

Благодаря этому порядок системы уравнений, используемых для расчета цепи, понижается на число узловых уравнений, а второе уравнение системы (21.17) для $n_{нк} = n_k - 1$ независимых контуров принимает вид

$$\sum f_l (i_{ij} - i_{jj}) = 0. \quad (23.2)$$

Расчет электрической цепи методом контурных токов производят в такой последовательности: вначале определяют контурные токи, характеризуемые матрицей $\dot{\mathbf{I}} = [\dot{I}_{11}, \dot{I}_{22}, \dots, \dot{I}_{n_c, n_c}]$, а затем по контурным токам рассчитывают напряжения на ветвях. При гармонических воздействиях, заданных в комплексной форме, можно использовать только второе уравнение системы (21.19), заменив в нем токи ветвей контурными токами. Запишем уравнение (21.19) в виде

$$\mathbf{BZ}_b \dot{\mathbf{I}}_b = \mathbf{B}\dot{\mathbf{E}}_b - \mathbf{BZ}_b \dot{\mathbf{J}}_b$$

и подставим в него значение (21.5), тогда получим

$$\mathbf{BZ}_b \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{I}}_k = \mathbf{B}(\dot{\mathbf{E}}_b - \mathbf{Z}_b \dot{\mathbf{J}}_b), \quad (23.3)$$

где произведение

$$\mathbf{BZ}_b \mathbf{B}^T = \mathbf{Z}_k = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n_c} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n_c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n_c 1} & Z_{n_c 2} & \dots & Z_{n_c n_c} \end{bmatrix} \quad (23.4)$$

имеет размерность сопротивления и называется матрицей контурных сопротивлений, а произведение

$$\mathbf{B}(\mathbf{E}_n - \mathbf{Z}_n \mathbf{J}_n) = \dot{\mathbf{E}}_n = \begin{bmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{21} \\ \vdots \\ \dot{E}_{n_1 n_c} \end{bmatrix} \quad (23.5)$$

имеет размерность напряжения и называется матрицей задающих контурных напряжений.

Подставляя значения (23.4) и (23.5) в уравнение (23.3), получим уравнение контурных токов в матричной форме:

$$\mathbf{Z}_k \dot{\mathbf{I}}_k = \dot{\mathbf{E}}_k \quad (23.6)$$

В развернутой форме уравнение (23.6) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{I}_{11} Z_{11} + \dot{I}_{22} Z_{12} + \dots + \dot{I}_{n_1 n_c} Z_{1n_c} = \dot{E}_{11}, \\ \dot{I}_{11} Z_{21} + \dot{I}_{22} Z_{22} + \dots + \dot{I}_{n_1 n_c} Z_{2n_c} = \dot{E}_{22}, \\ \dots \\ \dot{I}_{11} Z_{n_1 1} + \dot{I}_{22} Z_{n_1 2} + \dots + \dot{I}_{n_1 n_c} Z_{n_1 n_c} = \dot{E}_{n_1 n_c}. \end{cases} \quad (23.7)$$

Решение матричного уравнения (23.6) контурных токов имеет вид

$$\dot{\mathbf{I}}_k = \mathbf{Z}_k^{-1} \dot{\mathbf{E}}_k \quad (23.8)$$

или

$$\dot{\mathbf{I}}_k = \begin{bmatrix} \dot{I}_{11} \\ \dot{I}_{22} \\ \vdots \\ \dot{I}_{n_1 n_c} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_k} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots & \Delta_{n_1 1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{n_1 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1n_c} & \Delta_{2n_c} & \dots & \Delta_{n_1 n_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \vdots \\ \dot{E}_{n_1 n_c} \end{bmatrix}, \quad (23.9)$$

где $\Delta_k = |\mathbf{Z}_k|$ — определитель матрицы контурных сопротивлений;

$\Delta_{11}, \Delta_{12}, \dots, \Delta_{1j}, \dots$ — алгебраические дополнения соответственно элементов

$Z_{11}, Z_{12}, \dots, Z_{1j}$ — определителя Δ_k .

Пример 23.1. Составить систему контурных уравнений для обратимой электрической цепи (см. рис. 21.4), полагая, что все воздействия в ней являются гармоническими.

Решение. Выберем контурные токи, как показано на рис. 21.4. Составим контурную матрицу:

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \text{Ветви} \\ \text{Контурные} \end{array} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Составим матрицу сопротивлений ветвей:

$$\mathbf{Z}_k = \begin{array}{c} \text{Ветви} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{bmatrix} Z_1 & & & & \\ & Z_2 & & 0 & \\ & & Z_3 & & \\ & 0 & & Z_4 & \\ & & & & Z_5 \end{bmatrix} \end{array}$$

где $Z_1 = r_1 + j\omega L_1$; $Z_2 = r_2 + 1/(j\omega C_2)$; $Z_3 = r_3 + 1/(j\omega C_3)$; $Z_4 = r_4$; $Z_5 = r_5$.
 Определим матрицу контурных сопротивлений по (23.4):

$$\mathbf{Z}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 & & & & \\ & Z_2 & & 0 & \\ & & Z_3 & & \\ & 0 & & Z_4 & \\ & & & & Z_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}$$

где $Z_{11} = Z_1 + Z_4 + Z_5$; $Z_{12} = -Z_{21} = -Z_3$; $Z_{13} = Z_{31} = -Z_5$; $Z_{22} = Z_2 + Z_4$; $Z_{23} = Z_{32} = 0$; $Z_{33} = Z_3 + Z_5$.

Найденная матрица Z_k является симметричной и может быть составлена непосредственно по схеме цепи, изображенной на рис. 21.4, если воспользоваться следующими правилами.

Диагональные элементы матрицы Z_{ii} представляют собой собственные сопротивления контуров, положительны и равны суммам сопротивлений ветвей, входящих в рассматриваемый контур. Внедиагональные элементы Z_{ij} соответствуют суммам сопротивлений ветвей смежных контуров, взятым со знаком минус. Составим матрицы задающих напряжений и токов ветвей:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_s &= [0 \ 0 \ -\dot{E}_3 \ \dot{E}_4 \ 0]^T, \\ \dot{\mathbf{J}}_s &= [j_1 \ 0 \ 0 \ j_4 \ 0]^T.\end{aligned}$$

Определим матрицу задающих контурных напряжений по (23.5):

$$\mathbf{E}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j_1 Z_1 \\ 0 \\ -\dot{E}_3 \\ \dot{E}_4 - j_4 Z_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \dot{E}_{33} \end{bmatrix},$$

где $\dot{E}_{11} = -j_1 Z_1 + \dot{E}_4 - j_4 Z_4$; $\dot{E}_{22} = -\dot{E}_3 + j_4 Z_4$; $\dot{E}_{33} = -\dot{E}_3$.

Для обратимых цепей без взаимных индуктивностей матрицу задающих контурных напряжений можно составить непосредственно по схеме. Элементы матрицы представляют собой алгебраические суммы напряжений задающих источников (включая напряжения, эквивалентные задающим источникам тока), входящих в данный контур. Если напряжение источника совпадает с направлением обхода контура, то оно входит в матрицу со знаком плюс. Если направления источника и контура противоположны, то напряжение источника входит в матрицу со знаком минус.

Систему контурных уравнений составляем по (23.6):

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{11} \\ \dot{I}_{22} \\ \dot{I}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \dot{E}_{33} \end{bmatrix}$$

В развернутом виде система контурных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} Z_{11} \dot{I}_{11} + Z_{12} \dot{I}_{22} + Z_{13} \dot{I}_{33} = \dot{E}_{11}, \\ Z_{21} \dot{I}_{11} + Z_{22} \dot{I}_{22} + Z_{23} \dot{I}_{33} = \dot{E}_{22}, \\ Z_{31} \dot{I}_{11} + Z_{32} \dot{I}_{22} + Z_{33} \dot{I}_{33} = \dot{E}_{33}. \end{cases}$$

Пример 23.2. Определить переходную характеристику фильтра верхних частот на эмиттерном повторителе, изображенном на рис.23.2, а.

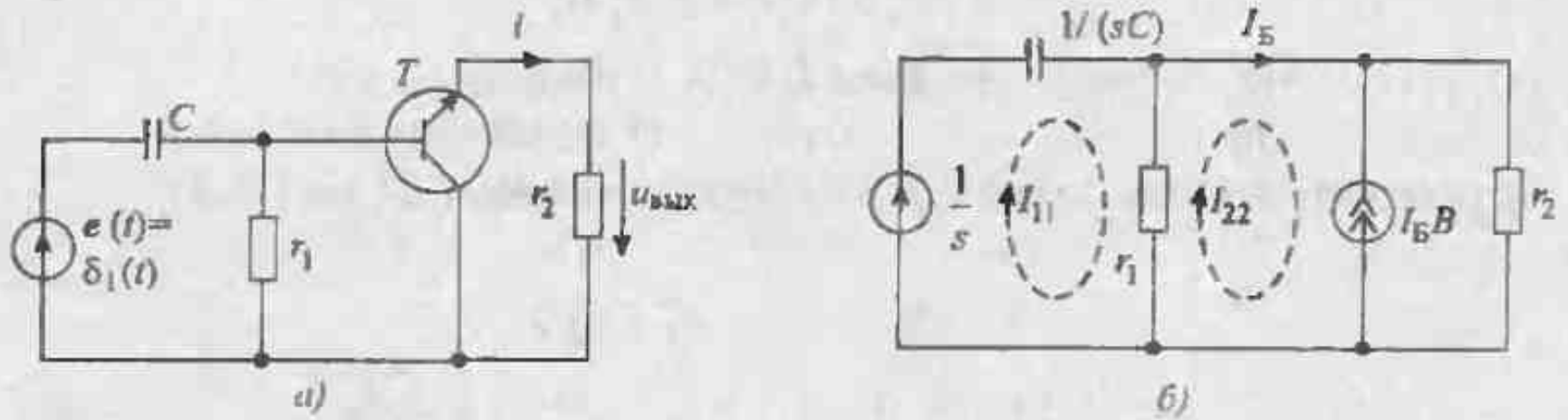


Рис. 23.2. Схема активного фильтра на эмиттерном повторителе (а) и ее схема замещения (б)

Решение. Составим эквивалентную схему фильтра, используя схему замещения биполярного транзистора в виде идеального управляемого источника тока $i_x = i_b B$ (рис.23.2, б). Расчет схемы выполним методом контурных токов в операторной форме. Уравнения контурных токов для схемы, изображенной на рис. 23.2, б, имеют вид

$$\begin{cases} I_{11}(s)Z_{11}(s) - I_{22}(s)Z_{12}(s) = E_{11}(s), \\ -I_{11}(s)Z_{21}(s) + I_{22}(s)Z_{22}(s) = E_{22}(s), \end{cases}$$

где $Z_{11}(s) = r_1 + 1/(sC)$; $Z_{12}(s) = Z_{21}(s) = r_1$; $Z_{22}(s) = r_1 + r_2$; $E_{11}(s) = 1/s$; $E_{22}(s) = -I_5(s) B r_2$.

Подставляя значения контурных сопротивлений и напряжений источников, получаем

$$\begin{cases} I_{11}(s)[r_1 + 1/(sC)] - I_{22}(s)r_1 = 1/s, \\ -I_{11}(s)r_1 + I_{22}(s)(r_1 + r_2 + B r_2) = 0. \end{cases}$$

Операторное значение тока базы

$$\begin{aligned} I_B(s) = I_{22}(s) &= \frac{1}{s} \frac{r_1}{r_1 r_2 (1+B) + \frac{r_1 + r_2 (1+B)}{sC}} = \\ &= \frac{1}{r_2 (1+B)} \frac{1}{s + \frac{r_1 + r_2 (1+B)}{C r_1 r_2 (1+B)}} \end{aligned}$$

Мгновенное значение тока базы определим с помощью формулы вычетов:

$$i_B(t) = i_{22}(t) = \frac{1}{r_2(1+B)} e^{-t/\tau},$$

где $\tau = \frac{r_1 + r_2(1+B)}{C r_1 r_2(1+B)}$ — постоянная времени цепи.

Ток в нагрузке r_2 имеет значение $i_n = i_B + B i_B = i_B(1+B)$.

Выходное напряжение, равное переходной характеристике цепи при $e(t) = \delta_1(t)$

имеет вид $u_{\text{вых}}(t)_{e(t)=\delta_1(t)} = h(t) = e^{-t/\tau}$.

Лекция 24. Расчет электрических цепей методом сигнальных графов

Сигнальный граф отражает систему алгебраических уравнений цепи, составленную методами, рассмотренными ранее. Использование сигнальных графов позволяет выполнять расчет сложных электрических цепей без решения системы алгебраических уравнений с помощью графических построений на плоскости. Сигнальные направленные графы применимы при расчете пассивных и активных цепей, содержащих различные электронные элементы — транзисторы, электронные лампы, операционные усилители.

При расчете установившихся режимов используют сигнальные направленные графы для комплексных значений токов и напряжений. При расчете переходных режимов используют сигнальные графы для операторных значений токов и напряжений.

Направленным сигнальным графом называют чертеж, составленный из узлов и ориентированных ветвей, соединяющих узлы. Форма и расположение узлов и ветвей на чертеже не имеют значения. Узлы графа отображают токи и напряжения в схеме. Сигналы в узлах в общем случае обозначим x_j , где j — порядковый номер узла графа. Линии, соединяющие узлы, называют **ветвями графа**. Ветвь начинается в узле j и заканчивается в узле k . Ориентацию ветвей указывают стрелкой на чертеже.

Каждой ветви графа приписывают определенное число a_{kj} , которое называют **передаточной функцией ветви**. Передача ветви может иметь размерность сопротивления, проводимости или быть безразмерной. Ветвь, которая начинается и кончается в одном и том же узле, называют **петлей**. Передача петли имеет значение a_{jj} .

На рис. 24.1 изображен направленный сигнальный граф, содержащий узлы с сигналами x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и ветви с передачами $a_{21}, a_{32}, a_{43}, a_{42}, a_{52}, a_{25}, a_{53}, a_{33}$. Узлы графа, содержащие только выходящие ветви, называют **узлами-источниками**.

Такие узлы отображают независимые переменные: задающие источники тока или напряжения. Узлом-источником на графе (рис. 24.1) является узел с сигналом x_1 . Узлы графа, содержащие входящие и выходящие ветви, называют **простыми**, а узлы, содержащие петли, **смешанными**. Узлы, содержащие только входящие ветви, называют **узлами-стоками**. Все узлы графа отображают переменные схемы, однако узлы-стоки, простые и смешанные узлы соответствуют зависимым переменным. Так, на графе (рис. 24.1) узел с сигналом x_4 является стоком, а узлы с сигналами x_2 и x_5 — простыми. Узел x_3 является смешанным.

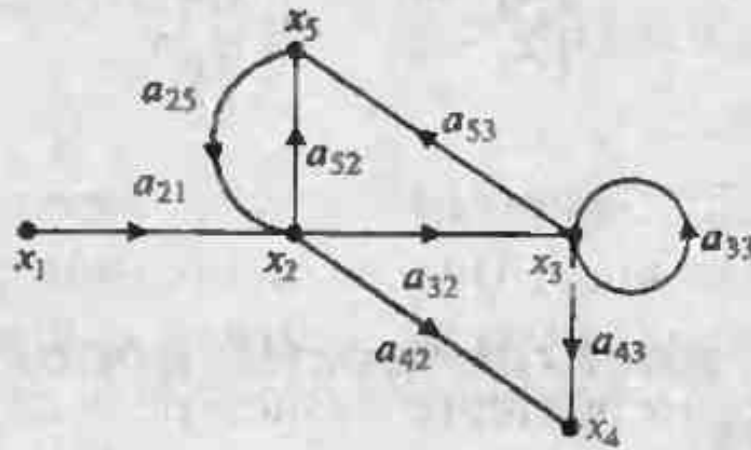


Рис. 24.1. Пример сигнального графа электрической цепи

Часть графа, образованная рядом последовательных однонаправленных ветвей, вдоль которых каждый узел встречается только один раз, называют **путем графа**. Путь характеризуется передачей P_k , которая равна произведению передач ветвей вдоль этого пути. Например, передача пути от узла 1 к узлу 5 равна $P_{15} = a_{21}a_{52}$.

Замкнутый путь, состоящий из последовательности однонаправленных ветвей, возвращающихся в данный узел, называют **контуром**. Контур может состоять из одной ветви, образующей в узле петлю. Так, на рис. 24.1 имеется контур, состоящий из ветвей с передачами a_{25}, a_{32}, a_{53} . Передача контура равна произведению передач ветвей, образующих этот контур. Контур графа, изображенного на рис. 21.1, имеют передачи $L_1 = a_{25}a_{32}a_{53}$, $L_2 = a_{33}$, $L_3 = a_{25}a_{52}$.

Контур называют **касающимся**, если они имеют хотя бы один общий узел, при отсутствии общих узлов — **некасающимся**. На рис.24.1 некасающимися являются контуры L_2 и L_3 , а касающимися — контуры L_1, L_2 и L_1, L_3 . Контур касается пути, если он имеет с ним хотя бы один общий узел. В противном случае контур называют не касающимся пути. На рис.24.1 путь P_{15} не касается контура L_2 .

Для определения сигналов в зависимых узлах используют формулу

$$x_k = \sum_{j=1}^m a_{kj} x_j, \quad (24.1)$$

согласно которой сигнал в k -м узле равен сумме произведений сигналов x_j на передачи ветвей a_{kj} , входящих в узел k . При этом суммирование производят по

всем m узлам графа, соединенным с узлом k входящими в него ветвями. Ветви, выходящие из узла k , на сигнал в этом узле не влияют, а задают сигналы в других узлах.

Для графа, изображенного на рис. 24.1, имеем следующую систему уравнений, составленную по формуле (24.1):

$$\begin{cases} x_2 = a_{21}x_1 + a_{25}x_5, \\ x_3 = a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \\ x_4 = a_{42}x_2 + a_{43}x_3, \\ x_5 = a_{52}x_2 + a_{53}x_3. \end{cases}$$

Очевидно, что каждое уравнение, составленное по (24.1), записывают в форме «причина — следствие». При этом узловой сигнал x_j в начале ветви kj истолковывают как *причину*, а узловой сигнал x_k в конце ветви kj — как *следствие*. Важным является то обстоятельство, что в качестве следствия сигнал x_k присутствует только в одном уравнении, а в качестве причины он может появиться любое число раз. Таким образом, направленный сигнальный граф является причинно-следственным, отражающим систему уравнений графически. Для построения графа уравнения системы должны быть записаны в форме «причина — следствие», причем в качестве следствия любой сигнал в уравнениях должен присутствовать только один раз.

Отношение сигналов в двух любых узлах графа называют **передачей** между этими узлами $K_{kj} = x_k/x_j$. При этом сигнал от нескольких источников в любом зависимом узле графа находят как сумму сигналов, исходящих из каждого узла источника, умноженных на передачи между этими узлами:

$$x_k = \sum_{j=1}^n K_{kj} x_j, \quad (24.2)$$

где K_{kj} — передача от узла j к узлу k ; x_j — сигнал в j -м узле-источнике.

Сигнальные графы электрических цепей можно составлять, используя уравнения, записанные по законам Кирхгофа, методом контурных токов или узловых напряжений. При этом следует учитывать, что, поскольку в уравнениях Кирхгофа контурных токов или узловых напряжений причинно-следственная связь не представлена в явном виде, необходимо придерживаться определенной последовательности при построении графа, позволяющей избежать повторного использования любой переменной в качестве следствия.

Граф активной цепи отличается от графа пассивной цепи тем, что наряду с независимыми узлами-источниками он содержит зависимые узлы-источники, отображающие управляемые источники напряжения или тока. Поэтому при построении графа активной цепи вначале строят графы всех активных элемен-

тов, входящих в схему, а затем вводят дополнительные узлы и ветви, отображающие пассивную часть схемы. Кроме того, необходимо следить за тем, чтобы зависимые величины в уравнениях активных элементов не были следствиями и в уравнениях пассивной части цепи.

Рассмотрим составление сигнального графа по уравнениям (23.10) контурных токов. Если контурные уравнения составлять для главных контуров при одинаковом направлении контурных токов, то они имеют вид

$$\begin{cases} \dot{I}_{11} Z_{11} + \dot{I}_{22} Z_{12} + \dot{I}_{33} Z_{13} + \dots + \dot{I}_{nn} Z_{1n} = \dot{E}_{11}, \\ \dot{I}_{11} Z_{21} + \dot{I}_{22} Z_{22} + \dot{I}_{33} Z_{23} + \dots + \dot{I}_{nn} Z_{2n} = \dot{E}_{22}, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{I}_{11} Z_{n1} + \dot{I}_{22} Z_{n2} + \dot{I}_{33} Z_{n3} + \dots + \dot{I}_{nn} Z_{nn} = \dot{E}_{nn}. \end{cases} \quad (24.3)$$

Систему уравнений (24.3) можно представить в причинно-следственной форме, если решить каждое контурное уравнение относительно одного контурного тока:

$$\begin{cases} \dot{I}_{11} = \dot{E}_{11} Z_{11}^{-1} - \dot{I}_{22} Z'_{12} - \dot{I}_{33} Z'_{13} - \dots - \dot{I}_{nn} Z'_{1n}, \\ \dot{I}_{22} = \dot{E}_{22} Z_{22}^{-1} - \dot{I}_{11} Z'_{21} - \dot{I}_{33} Z'_{23} - \dots - \dot{I}_{nn} Z'_{2n}, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{I}_{nn} = \dot{E}_{nn} Z_{nn}^{-1} - \dot{I}_{11} Z'_{n1} - \dot{I}_{22} Z'_{n2} + \dots + \dot{I}_{nn} Z'_{n(n-1)}, \end{cases} \quad (24.4)$$

где $Z'_{12} = Z_{12} / Z_{11}$, $Z'_{21} = Z_{21} / Z_{22}$ и т. д. — приведенные контурные сопротивления.

Граф, построенный по уравнениям (24.4), приведен на рис. 24.2. В общем случае этот граф содержит узлы-источники, соответствующие задающим

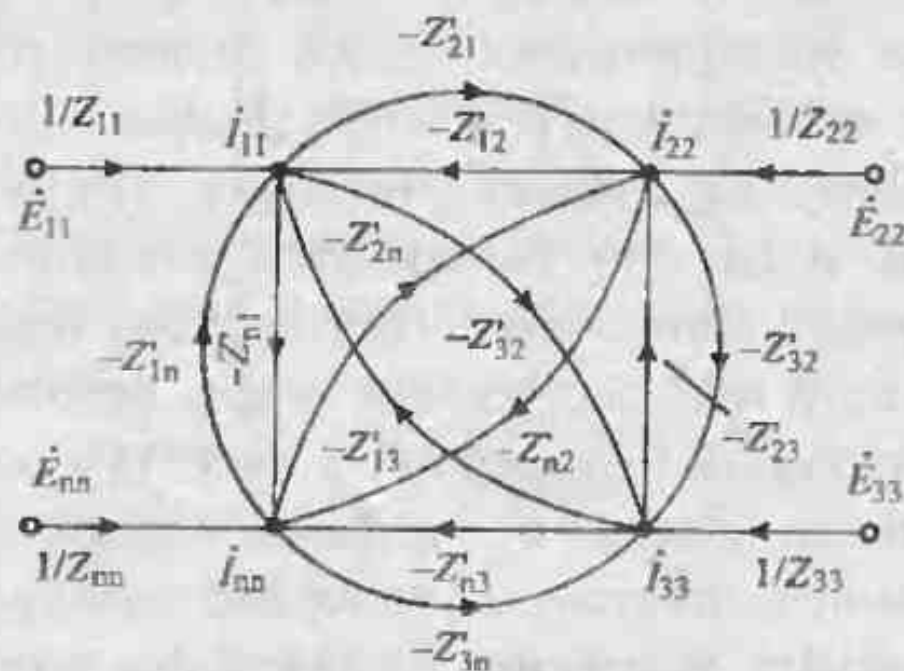


Рис. 24.2. Пример графа, построенного по уравнениям контурных токов

источникам напряжения $\dot{E}_{\text{вк}}$, каждый из которых связан с узлами, соответствующими контурным токам, ветвями с передачами, равными проводимостям ветвей с задающими источниками. Кроме того, все узлы, отображающие контурные токи, связаны между собой попарно ветвями, передачи которых равны приведенным контурным сопротивлениям.

Построение графа по уравнениям узловых напряжений (22.8) производят аналогично. При этом граф содержит узлы-источники, соответствующие задающим источникам тока. Каждый из этих узлов должен быть связан с соответствующим узловым напряжением ветвью с передачей, равной сопротивлению ветви с задающим источником тока. Кроме того, все узлы, отображающие узловые напряжения, связываются между собой попарно ветвями, передачи которых равны приведенным узловым проводимостям. Граф, построенный по уравнениям узловых напряжений, приведен на рис. 24.3.

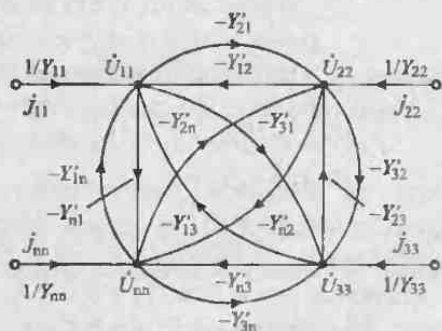


Рис. 24.3. Пример графа, построенного по уравнениям узловых напряжений

Пример 24.1. Для схемы рис. 24.4, а построить граф по уравнениям контурных токов.

Решение. Запишем уравнения контурных токов для схемы, изображенной на рис. 24.4, а:

$$\begin{aligned} i_{11}Z_{11} + i_{22}Z_{12} &= \dot{E}_1 - j_2Z_2, \\ i_{11}Z_{21} + i_{22}Z_{22} &= j_2Z_2, \end{aligned}$$

где $Z_{11} = Z_1 + Z_2$; $Z_{22} = Z_2 + Z_3 + Z_4$; $Z_{12} = Z_{21} = -Z_2$ — контурные сопротивления. Запишем эти уравнения в причинно-следственной форме:

$$\begin{cases} i_{11} = \dot{E}_1 Z_{11}^{-1} - i_{22} Z_2 Z_{11}^{-1} - i_{22} Z'_{12}, \\ i_{22} = i_2 Z_2 Z_{22}^{-1} - i_{11} Z_{21}, \end{cases}$$

где $Z'_{12} = Z_{12}/Z_{11}$; $Z'_{21} = Z_{21}/Z_{22}$.

Граф, построенный по этим уравнениям, изображен на рис. 24.4, б.

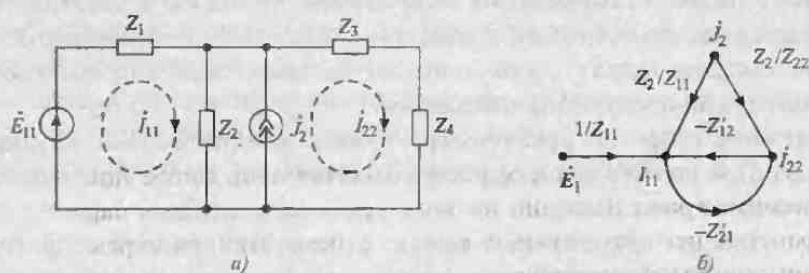


Рис 24.4. Схема цепи к примеру 24.1 (а) и ее сигнальный граф (б)

Пример 24.2. Для схемы рис.24.5, а построить граф по уравнениям узловых напряжений.

Решение. Запишем уравнения узловых напряжений:

$$\begin{cases} \dot{U}_{11} Y_{11} + \dot{U}_{22} Y_{12} = J_2 + E_1 Y_1, \\ \dot{U}_{11} Y_{21} + \dot{U}_{22} Y_{22} = 0, \end{cases}$$

где $Y_{11} = Y_1 + Y_2 + Y_3$; $Y_{22} = Y_3 + Y_4$; $Y_{12} = Y_{21} = -Y_3$ — узловые проводимости. Запишем эти уравнения в причинно-следственной форме:

$$\begin{cases} \dot{U}_{11} = J_2 Y'_{11} + \dot{E}_1 Y_1 Y'_{11} - \dot{U}_{22} Y'_{12}, \\ \dot{U}_{22} = -Y'_{21} \dot{U}_{11}, \end{cases}$$

где $Y'_{12} = Y_{12}/Y_{11}$; $Y'_{21} = Y_{21}/Y_{22}$.

Граф, построенный по этим уравнениям, приведен на рис.24.5, б.

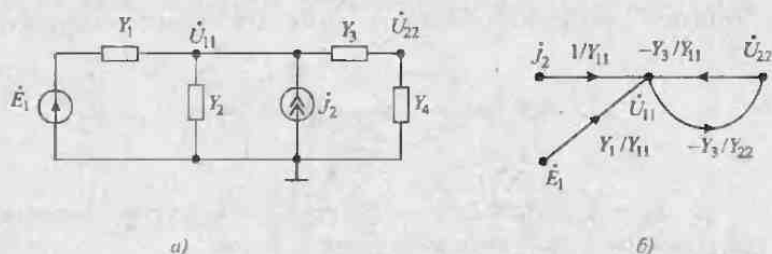


Рис 24.5. Схема цепи к примеру 24.2 (а) и ее сигнальный граф (б)

После составления графа можно приступить к его решению, т. е. установить связь между двумя любыми его переменными. Существуют два способа решения графа. Первый способ заключается в *последовательном упрощении графа с помощью эквивалентных преобразований*, в результате которых сложный граф сводится к одной-единственной ветви, передача которой и равна передаче графа.

По второму способу решение графа записывают *сразу в виде формулы Мэсона*. Вторым способом более короткий, однако в процессе последовательных преобразований графа наглядно проявляется роль отдельных параметров и связей. Устранение нежелательных связей и слабо влияющих параметров позволяет заметно упростить решение.

К эквивалентным преобразованиям графа относятся:

- объединение последовательных однонаправленных ветвей;
- объединение параллельных однонаправленных ветвей;
- исключение петли в конце ветви;
- исключение контура в конце пути;
- исключение источника;
- инверсия ветви, связанной с источником;
- исключение узла.

Эквивалентные преобразования основаны на преобразованиях системы уравнений, описывающих исходный граф. Основные виды эквивалентных преобразований, исходный и конечный графы приведены в табл. 24.1.

Решение графа по формуле Мэсона получается непосредственно по структуре исходного графа. Для графа с одним узлом-источником формула Мэсона имеет вид

$$K = \frac{1}{\Delta} \sum P_k \Delta_k, \quad (24.5)$$

где P_k — передача k -го пути от источника до стока;

Δ_k — определитель части графа, не касающейся k -го пути;

Δ — определитель графа, K — передача графа.

Если граф имеет m контуров (петель), то определитель графа




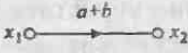
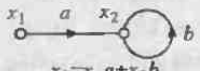
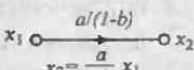

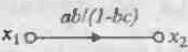

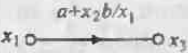
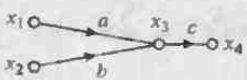
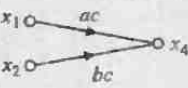


$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \dots, \quad (24.6)$$

где $\sum L_1$ — сумма передач всех m контуров;

$\sum L_2$ — сумма произведений передач двух любых контуров, не касающихся друг друга;

$\sum L_3$ — сумма произведений передач трех любых контуров, не касающихся друг друга.

Таблица 24.1.

Вид преобразования	Исходный граф и его уравнения	Результирующий граф и его уравнения
Объединение последовательных однонаправленных ветвей	 $x_2 = x_1 a; x_3 = x_2 b$	 $x_3 = abx_1$
Объединение параллельных однонаправленных ветвей	 $x_2 = x_1 a + x_1 b$	 $x_2 = (a+b)x_1$
Исключение петли в конце пути	 $x_2 = x_1 a + x_2 b$	 $x_2 = \frac{a}{1-b} x_1$
Исключение контура в конце пути	 $x_2 = x_1 a + x_3 b; x_3 = x_2 b$	 $x_2 = \frac{ab}{1-bc} x_1$
Исключение источника	 $x_3 = x_1 a + x_2 b$	 $x_2 = x_1 \left(a + \frac{x_2 b}{x_1} \right)$
Исключение простого узла	 $x_1 = x_1 a + x_3 b; x_4 = x_3 c$	 $x_4 = x_1 ab + x_2 bc$
Инверсия ветви, связанной с источником	 $x_3 = x_1 a + x_2 b$	 $x_1 = x_1 \frac{1}{a} - x_2 \frac{b}{a}$

Определитель Δ_k находят с помощью выражения

$$\Delta_k = 1 - \sum L_{1k} + \sum L_{2k} - \sum L_{3k} + \dots, \quad (24.7)$$

где $\sum L_{1k}$ — сумма передач всех контуров (петель), не касающихся k -го пути; $\sum L_{2k}$ — сумма произведений передач двух любых контуров, не касающихся друг друга и k -го пути, и т. д.

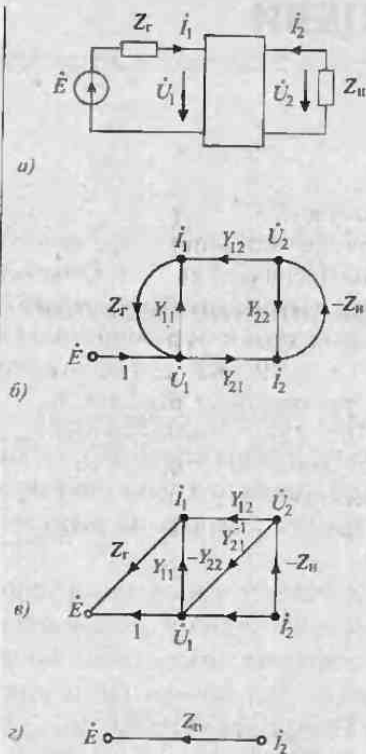


Рис. 24.6. Схема цепи (а), ее сигнальный граф (б), инвертированный граф (в), результирующий граф (г)

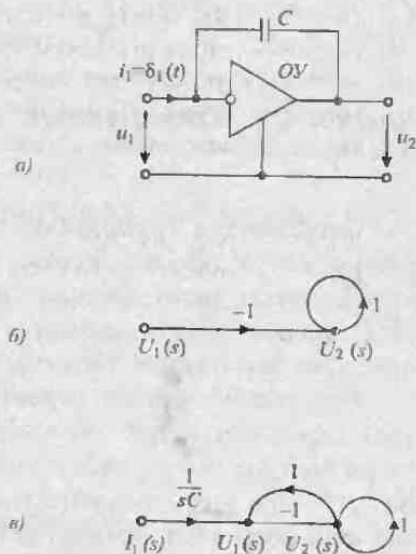


Рис. 24.7. Схема цепи (а), сигнальный граф ОУ (б) и полный граф (в)

Мгновенное значение выходного напряжения OU находим с помощью вычетов для двукратного нулевого корня:

$$u_2(t) = -\frac{1}{C}t.$$

Переходное сопротивление равно отношению мгновенного значения выходного напряжения к входному току:

$$z(t) = \frac{u_2(t)}{i_1(t)} = -\frac{1}{C}t.$$

Так как при постоянном входном токе напряжение на выходе растет линейно во времени, то схема рис. 24.7, а является идеальным интегратором тока.

ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ**Лекция 25. Трехфазные цепи при соединении звездой**

Особенности трехфазных систем. Трехфазная система переменного тока широко используется в силовых электротехнических и энергетических установках. Впервые такая система была продемонстрирована русским инженером М. О. Доливо-Добровольским в 1891 году при передаче энергии на электротехническую выставку во Франкфурте-на-Майне.

Трехфазная система переменного тока представляет собой совокупность трех отдельных цепей, объединенных в одну общую систему. Напряжения в такой системе имеют одинаковую амплитуду и сдвинуты между собой по фазе на 120° . При этом *последовательность чередования фаз может быть прямой или обратной*. При прямой последовательности напряжение каждой последующей фазы отстает от предыдущей на угол, равный 120° . При обратной последовательности напряжение каждой последующей фазы опережает предыдущую на угол, равный 120° .

В трехфазной системе используются специальные трехфазные генераторы. В энергетических установках применяются специальные трехфазные электромеханические генераторы, а в электротехнических установках — это различного рода статические инверторы.

Основными применениями трехфазных систем являются:

- передача энергии на большие расстояния,
- питание асинхронных трехфазных двигателей,
- создание постоянных напряжений с малыми пульсациями,
- питание электросварочного оборудования и т. д.

Трехфазные источники напряжения. Трехфазные источники напряжения создают три напряжения, сдвинутые относительно друг друга на треть периода (или угол, равный $2\pi/3$). Форма этих напряжений может быть различной: синусоидальной, прямоугольной, многоступенчатой, импульсной с широтной модуляцией. Однако наибольшее распространение получили генераторы, которые создают три гармонических напряжения:

$$\begin{cases} e_A(t) = E_m \sin \omega t, \\ e_B(t) = E_m \sin(\omega t - 120^\circ), \\ e_C(t) = E_m \sin(\omega t + 120^\circ). \end{cases} \quad (25.1)$$

Схема такого генератора показана на рис. 25.1а. Генератор содержит три обмотки, в которых индуктируются три напряжения $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$, соединенные между собой в точке 0. Векторная диаграмма для прямого чередования фаз приведена на рис. 25.1, б, а для обратного — на рис. 25.1, в.

Мгновенные значения этих трех напряжений для прямого чередования фаз показаны на рис. 25.1, г.

Комплексные значения трех напряжений генератора в соответствии с (25.1) можно представить в виде

$$\begin{cases} \dot{E}_A = E = E a^0, \\ \dot{E}_B = E e^{-j120^\circ} = E a^{-1}, \\ \dot{E}_C = E e^{j120^\circ} = E a^{+1}, \end{cases} \quad (25.2)$$

где E — действующее значение напряжения генератора,

$a = e^{2\pi j/3} = e^{j120^\circ}$ — фазный множитель трехфазной системы (оператор поворота на 120°).

Очевидно, что умножение на a поворачивает вектор напряжения E на угол, равный $+120^\circ$. Аналогично, умножение на a^{-1} поворачивает вектор E на угол -120° , что эквивалентно умножению на $a^2 = e^{j240^\circ}$. Сумма трех единичных векторов $a^0 + a^1 + a^2 = 1 + a + a^2 = 0$.

Провода, соединяющие фазы генератора и приемника, называются *линейными*, а токи в них — *линейными токами*. Напряжения E_A, E_B, E_C между началами и концами фаз генератора называются *фазными* U_ϕ , а напряжения E_{BA}, E_{AC}, E_{CB} между началами фаз генератора — *линейными* U_n . Для симметричного трехфазного генератора $U_n = \sqrt{3} U_\phi$.

Соединение приемников звездой. Соединение приемников звездой представляет такое включение фаз приемника, при котором все начала (или концы) фаз соединены в один узел 0', называемый *нулевой* (или *нейтральной*) точкой приемника. На рис. 25.2, а показано соединение звездой фаз генератора E_A, E_B, E_C , сопротивлений приемников $Z_A = r_A + jx_A, Z_B = r_B + jx_B, Z_C = r_C + jx_C$ и сопротивления нулевого провода $Z_0 = r_0 + jx_0$. Векторная диаграмма, соответствующая такому включению, приведена на рис. 25.2, б.

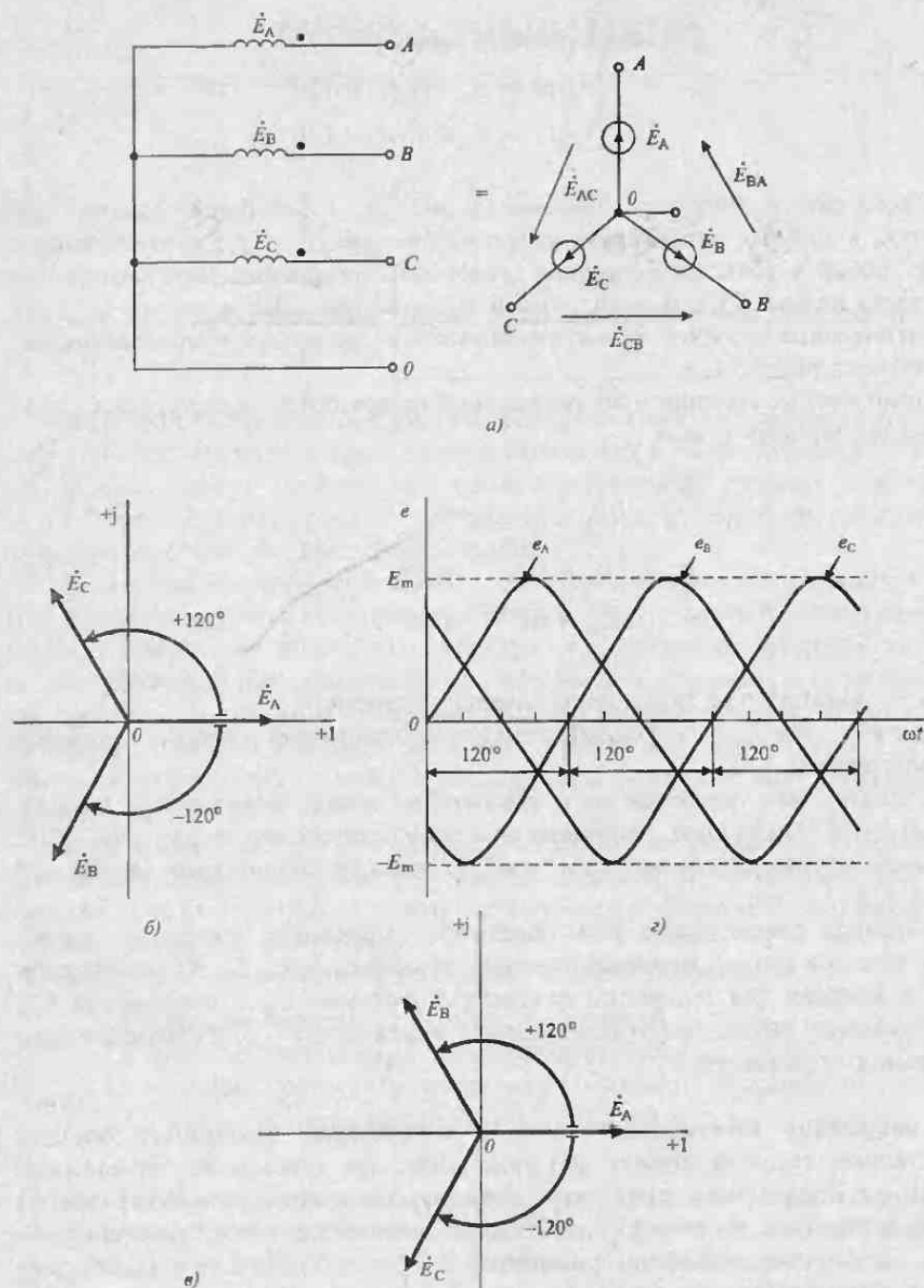
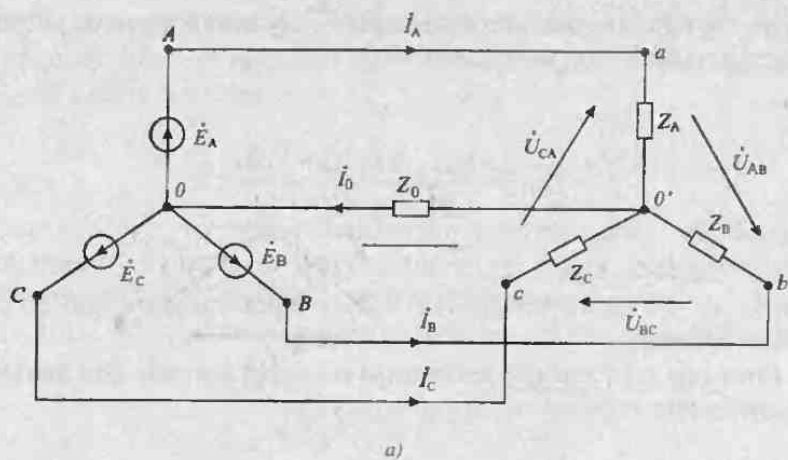
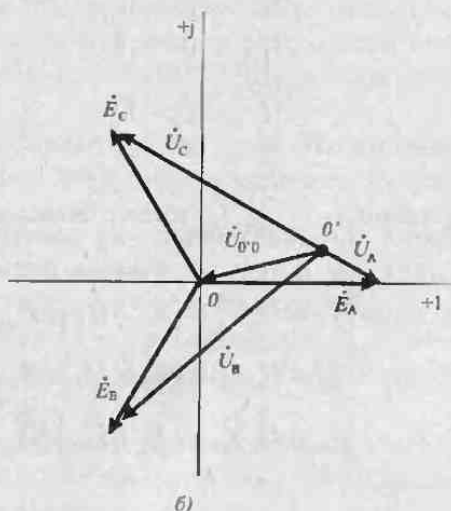


Рис. 25.1. Соединение звездой обмоток трехфазного генератора (а), его векторные диаграммы (б, в) и мгновенные значения напряжений фаз (z)



а)



б)

Рис. 25.2. Соединение звездой трехфазного генератора с приемником (а) и его векторная диаграмма (б)

Линейные и фазные напряжения приемника связаны между собой соотношениями:

$$\begin{cases} \dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B, \\ \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C, \\ \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A. \end{cases} \quad (25.3)$$

Падение напряжения на сопротивлении Z_0 нулевого провода определяется как напряжение между двумя узлами $0'-0$

$$-\dot{U}_0 = \dot{U}_{0'0} = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_0}, \quad (25.4)$$

где $Y_A = 1/Z_A$, $Y_B = 1/Z_B$, $Y_C = 1/Z_C$, $Y_0 = 1/Z_0$ — проводимости фаз приемника и нулевого провода.

Если известны напряжения генератора и сопротивления фаз приемника, то фазные напряжения определяются по формулам:

$$\begin{cases} \dot{U}_A = \dot{E}_A - \dot{U}_0, \\ \dot{U}_B = \dot{E}_B - \dot{U}_0, \\ \dot{U}_C = \dot{E}_C - \dot{U}_0. \end{cases} \quad (25.5)$$

Токи в фазах приемника $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ имеют значения

$$\begin{cases} \dot{I}_A = \dot{U}_A Y_A = (\dot{E}_A - \dot{U}_0) / Z_A, \\ \dot{I}_B = \dot{U}_B Y_B = (\dot{E}_B - \dot{U}_0) / Z_B, \\ \dot{I}_C = \dot{U}_C Y_C = (\dot{E}_C - \dot{U}_0) / Z_C. \end{cases} \quad (25.6)$$

Аналогично определяется ток в нулевом проводе

$$\dot{I}_0 = \dot{U}_0 Y_0 = \dot{U}_0 / Z_0. \quad (25.6a)$$

При отсутствии нулевого провода следует принять $Y_0 = 0$.

Ток в нулевом проводе равен сумме фазных токов

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C. \quad (25.7)$$

Теперь перейдем к рассмотрению различных режимов работы трехфазной системы при соединении генераторов и приемников звездой с нулевым и без нулевого провода.

Равномерная нагрузка фаз генератора. При равномерной нагрузке фаз генератора проводимости нагрузки $Y_A = Y_B = Y_C = Y_n$ и, следовательно, из уравнений (25.6), (25.7) находим, что

$$\dot{i}_0 = (\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C) Y_n = (1 + a + a^2) Y_n = 0. \quad (25.8)$$

Отсюда следует, что при равномерной нагрузке фаз напряжение между нулевыми точками генератора и нагрузки $\dot{U}_0 = 0$ при любом сопротивлении нулевого провода, в том числе и при его отсутствии.

Кроме того, фазные напряжения генератора равны фазным напряжениям приемника

$$\dot{U}_A = \dot{E}_A, \dot{U}_B = \dot{E}_B, \dot{U}_C = \dot{E}_C.$$

Векторная диаграмма при равномерной нагрузке фаз генератора приведена на рис. 25.3, а. При симметричной системе напряжений генератора линейные и фазные напряжения приемника связаны соотношением $U_n = \sqrt{3} U_\phi$, а линейные токи равны фазным $I_n = I_\phi$.

Очевидно, что при равномерной нагрузке фаз нулевой провод можно исключить без изменения при этом токов и напряжений приемников.

Неравномерная нагрузка фаз генератора. При неравномерной нагрузке фаз генератора следует рассматривать два случая: при наличии или отсутствии нулевого провода. Если нулевой провод присутствует, то токи в нагрузках и нулевом проводе определяются по формулам (25.6). При этом напряжения на нагрузках можно определить по формулам (25.5), а напряжение на нулевом проводе — по формуле (25.4).

Если сопротивление нулевого провода принять равным нулю ($Z_0 = 0$), то напряжение $\dot{U}_0 = 0$ и, следовательно, фазные напряжения приемника равны фазным напряжениям генератора

$$\dot{U}_A = \dot{E}_A, \dot{U}_B = \dot{E}_B, \dot{U}_C = \dot{E}_C.$$

При этом ток в нулевом проводе определяется по формуле (25.7). Векторная диаграмма для этого случая приведена на рис. 25.3, б.

Если нулевой провод отсутствует ($Y_0 = 0$), то нулевое напряжение определяется по формуле

$$\dot{U}_0 = (\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C) / (Y_A + Y_B + Y_C).$$

При этом фазные напряжения приемника не равны фазным напряжениям генератора и определяются выражениями (25.5). Векторная диаграмма для этого случая приведена на рис. 25.3, в.

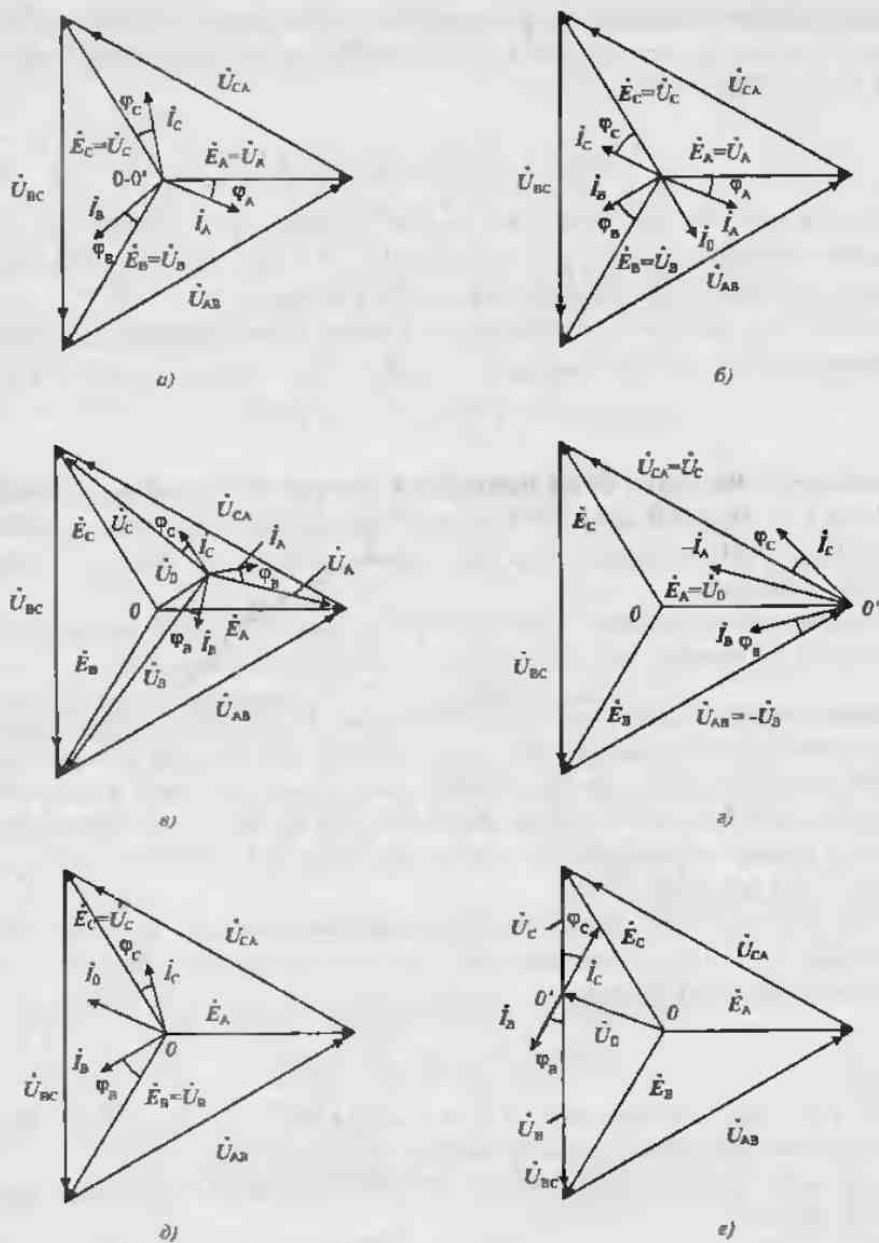


Рис 25.3. Векторные диаграммы для различных режимов при соединении присмычков звездой: равномерная нагрузка (а); неравномерная нагрузка с нулевым проводом (б); неравномерная нагрузка без нулевого провода (в); короткое замыкание фазы А (г); обрыв фазы А с нулевым проводом (д); обрыв фазы А без нулевого провода (е)

Лекция 26. Трехфазные цепи при соединении треугольником

Особенности включения трехфазных систем треугольником. При соединении трехфазных систем треугольником также используются три гармонических напряжения (25.1), которые были рассмотрены в лекции 25. Однако, соединение этих источников выполняется таким образом, что начало одной фазы соединяется с концом другой. На рис. 26.1, а показано такое включение трех обмоток генератора и соответствующее ему включение источников напряжения \dot{E}_{BA} , \dot{E}_{CB} , \dot{E}_{AC} .

Векторная диаграмма для соединения обмоток генератора по схеме треугольника приведена на рис. 26.1, б. На этой диаграмме полагается, что вектора напряжений генератора имеют значения

$$\begin{cases} \dot{E}_{BA} = E, \\ \dot{E}_{CB} = E a^{-1} = E e^{-j120^\circ}, \\ \dot{E}_{AC} = E a = E e^{j120^\circ}, \end{cases} \quad (26.1)$$

т. е. генератор считается симметричным с прямым чередованием фаз.

При соединении нагрузок треугольником фазные напряжения будут равны линейным, а линейные токи равны геометрической разности двух фазных токов, подходящих к вершине треугольника нагрузок, как показано на рис. 26.2. При этом для положительных направлений токов справедливы следующие соотношения, которые устанавливают связь между линейными и фазными токами

$$\begin{cases} \dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}, \\ \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}, \\ \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}. \end{cases} \quad (26.2)$$

Фазные токи рассчитываются по известным линейным напряжениям \dot{U}_{AB} , \dot{U}_{BC} , \dot{U}_{CA} и проводимостям Y_{AB} , Y_{BC} , Y_{CA} фаз приемников

$$\begin{cases} \dot{I}_{AB} = \dot{U}_{AB} Y_{AB}, \\ \dot{I}_{BC} = \dot{U}_{BC} Y_{BC}, \\ \dot{I}_{CA} = \dot{U}_{CA} Y_{CA}. \end{cases} \quad (26.3)$$

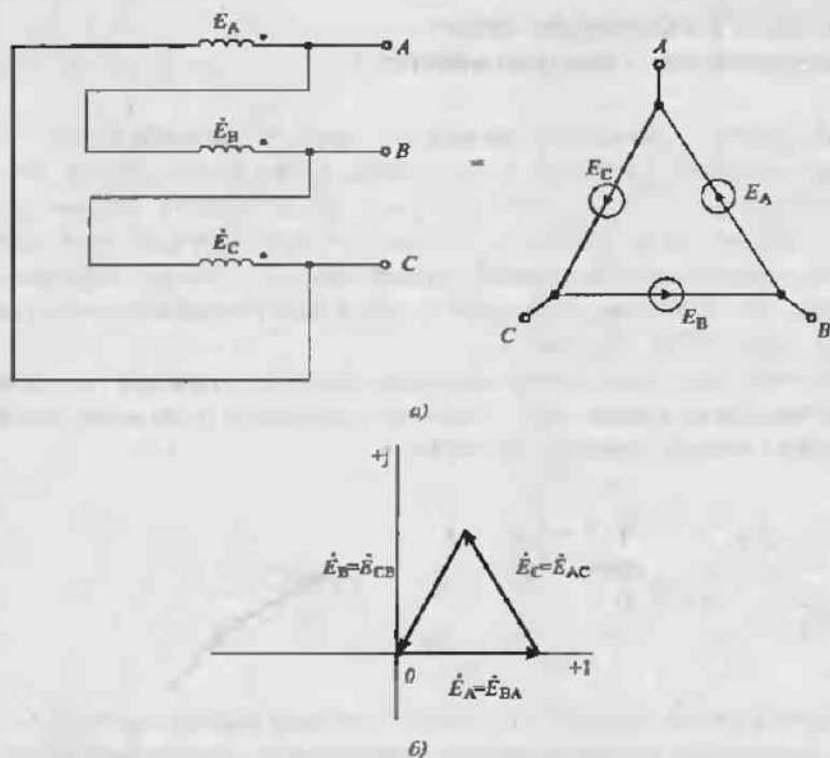


Рис. 26.1 Схема трехфазного генератора при включении треугольником (а) и его векторная диаграмма (б)

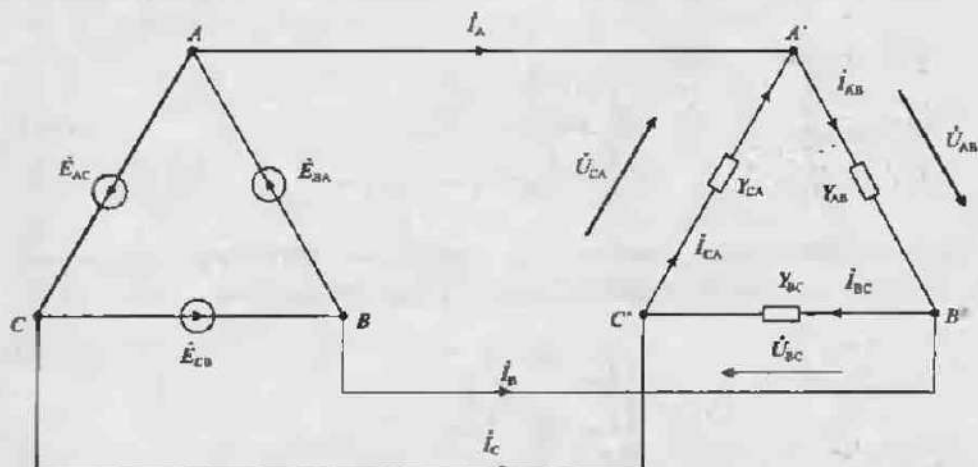


Рис. 26.2 Соединение генератора и нагрузки по схеме треугольника

Если падения напряжений на проводах линий передачи малы, то можно считать, что напряжения генератора равны соответствующим напряжениям приемника, т. е. $\dot{E}_{BA} = \dot{U}_{AB}$, $\dot{E}_{CB} = \dot{U}_{BC}$, $\dot{E}_{CB} = \dot{U}_{CA}$.

Из уравнений (26.2) также следует, что при любых значениях фазных токов для линейных токов справедливо выражение

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0. \quad (26.4)$$

Следует отметить, что включение нагрузок по схеме треугольника возможно при любом включении обмоток генератора, как по схеме треугольника, так и по схеме звезды. Однако, при включении генератора по схеме звезды фазные напряжения приемника будут равны линейным напряжениям генератора. При этом нулевая точка генератора не используется.

Рассмотрим некоторые частные режимы работы при включении нагрузок по схеме треугольника. К таким режимам относятся:

- равномерная нагрузка фаз генератора;
- неравномерная нагрузка фаз генератора;
- обрыв одной фазы приемника;
- обрыв двух фаз приемника;
- обрыв линейного провода.

Короткое замыкание любой фазы приемника приводит к аварийному режиму, так как при этом замыкается накоротко одна из обмоток генератора, и поэтому недопустимо.

Равномерная нагрузка фаз генератора. При симметричной системе напряжений генератора, определяемых уравнениями (26.1) и одинаковой нагрузке фаз приемника ($Y_{AB} = Y_{BC} = Y_{CA} = Y_n$) действующие значения токов в фазах равны между собой, поэтому линейные токи связаны с фазными токами соотношением

$$I_n = \sqrt{3} I_{\phi}. \quad (26.5)$$

Токи в фазах приемника определяются по формулам (26.3) и при равенстве проводимостей имеют значения

$$\begin{cases} \dot{I}_{AB} = E Y_n, \\ \dot{I}_{BC} = E a^{-1} Y_n = E e^{-j120^\circ} Y_n, \\ \dot{I}_{CA} = E a Y_n = E e^{j120^\circ} Y_n. \end{cases} \quad (26.6)$$

Векторная диаграмма для равномерной нагрузки фаз генератора приведена на рис. 26.3, а.

Неравномерная нагрузка фаз генератора. Неравномерная нагрузка фаз генератора является наиболее распространенным режимом работы трехфазной системы. Неравномерная нагрузка характеризуется различными значениями проводимостей, включенных в приемник, т. е. $Y_{AB} = Y_{BC} = Y_{CA}$. Действующие значения токов в фазах приемника при неравномерной нагрузке и симметричном генераторе пропорциональны проводимостям нагрузки и определяются по формулам (26.3).

Векторная диаграмма для неравномерной нагрузки фаз генератора приведена на рис. 26.3, б. Линейные токи при неравномерной нагрузке фаз можно определить по формулам (26.2).

Обрыв одной фазы приемника. При обрыве одной фазы приемника ток в ней будет равен нулю. Токи в других фазах приемника не изменятся, так как не изменятся фазные напряжения.

В линейном проводе, не связанном с оборванной фазой, ток также не изменится. Линейные токи двух других фаз станут равными фазным токам.

Например, при обрыве фазы А-В приемника ток $I_{AB} = 0$, а токи других фаз не изменятся. Линейные токи в этом случае будут иметь следующие значения

$$\begin{cases} \dot{I}_A = -\dot{I}_{CA} = -\dot{U}_{CA} Y_{CA}, \\ \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} = \dot{U}_{BC} Y_{BC}, \\ \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = \dot{U}_{CA} Y_{CA} - \dot{U}_{BC} Y_{BC}. \end{cases} \quad (26.7)$$

Векторная диаграмма обрыва фазы А-В приведена на рис. 26.3, в.

Обрыв двух фаз приемника. При обрыве двух фаз приемника ток в них будет равен нулю. Ток в неповрежденной фазе не изменится, так как напряжение на ней сохранится неизменным.

Ток в линейном проводе, подходящем к оборванным фазам, будет равен нулю. Токи в других линейных проводах станут равны фазным токам.

Так, например, при обрыве фаз А-В и В-С фазные токи $I_{AB} = I_{BC} = 0$, а линейные токи примут значения

$$\begin{cases} \dot{I}_A = -\dot{I}_{CA}, \\ \dot{I}_B = 0, \\ \dot{I}_C = \dot{I}_{CA}. \end{cases} \quad (26.8)$$

Векторная диаграмма токов и напряжений при обрыве двух фаз приемника приведена на рис. 26.3, г.

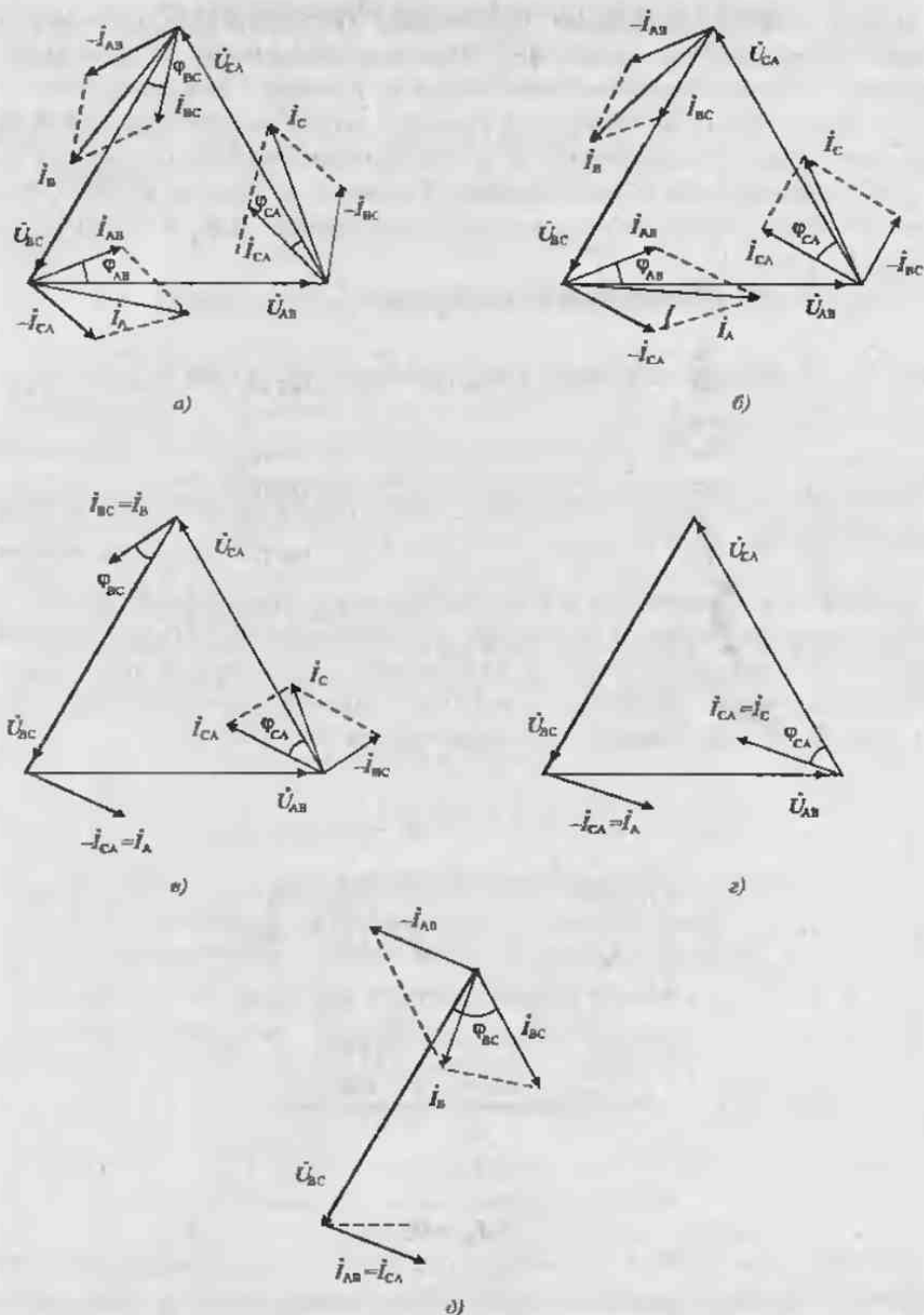


Рис. 26.3. Векторные диаграммы соединения нагрузок треугольником: при равномерной нагрузке (а); при неравномерной нагрузке (б); при обрыве одной фазы (в); при обрыве двух фаз (г); при обрыве линейного провода (д)

Обрыв линейного провода. При обрыве линейного провода трехфазная система превращается в однофазную. При этом напряжение и ток в фазе, не связанной с оборванным линейным проводом, останутся без изменений.

Две другие фазы, связанные с оборванным линейным проводом, оказываются соединенными последовательно и подключенными параллельно первой фазе.

Так, например, при обрыве линейного провода А фазы А-В и В-С будут включены последовательно и подключены параллельно фазе В-С, напряжение на которой равно \dot{U}_{BC} .

Токи в фазах определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{i}_{AB} = \dot{i}_{CA} &= -\dot{U}_{BC} / (Z_{CA} + Z_{AB}) = -\dot{U}_{BC} Y_{BC} Y_{CA} / (Y_{AB} + Y_{CA}), \\ \dot{i}_{BC} &= \dot{U}_{BC} Y_{BC}. \end{aligned}$$

Векторная диаграмма токов и напряжений при обрыве линейного провода приведена на рис. 26.3, д.

Трехфазная система звезда — треугольник. Выше было сказано, что способ соединения обмоток генератора не предопределяет способ соединения нагрузок. Поэтому на практике к трехфазному генератору, включенному по схеме звезды, можно подключить нагрузку, соединенную по схеме треугольника. Схема подобного подключения приведена на рис. 26.4.

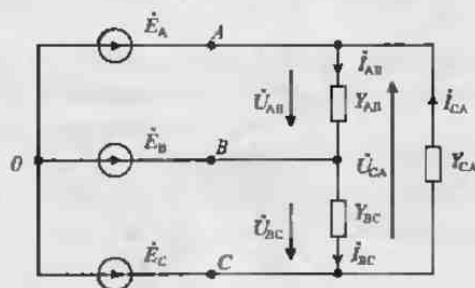


Рис. 26.4 Соединение «звезда-треугольник»

Из этой схемы следует, что каждое плечо треугольника оказывается включенным на линейное напряжение генератора, соединенного по схеме звезды. Поскольку линейное напряжение в 3 раза больше фазного, то токи в фазах симметричного приемника также вырастут в 3 раза. В общем случае их можно определить по формулам

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

Лекция 27. Пассивные электрические фильтры

Основные понятия о пассивных электрических фильтрах. Пассивным электрическим фильтром называют четырехполюсник, который пропускает колебания одних частот и не пропускает колебания других частот. При этом полагают, что фильтр пропускает колебание данной частоты, если амплитуда напряжения на выходе фильтра незначительно уменьшилась по сравнению с амплитудой на его входе. Практически это означает, что для пропускаемых сигналов модуль комплексного коэффициента передачи фильтра по напряжению должен быть равен единице (или быть близок к ней).

Для определения комплексного коэффициента передачи фильтра воспользуемся уравнениями четырехполюсника в системе A -параметров (рис. 27.1):

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2, \end{cases} \quad (27.1)$$

где A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} — комплексные A -параметры четырехполюсника;

\dot{U}_1, \dot{I}_1 — напряжение и ток на входе четырехполюсника;

\dot{U}_2, \dot{I}_2 — напряжение и ток на выходе четырехполюсника.

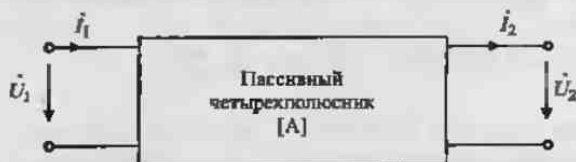


Рис. 27.1. Пассивный четырехполюсник в качестве фильтра

В стационарном режиме при гармоническом сигнале на входе A -параметры четырехполюсника являются комплексными величинами, характеризующими его функции передачи. Так, например, $A_{11} = \dot{U}_1 / \dot{U}_2$ при $\dot{I}_2 = 0$ характеризует

комплексный коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению при разомкнутом выходе.

Дополнительно для пассивных четырехполюсников справедливо уравнение связи $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$, согласно которому они полностью описываются только тремя A -параметрами. Если к тому же четырехполюсник симметричен, то для его полного описания вполне достаточно только двух A -параметров, так как $A_{11} = A_{22}$.

В теории пассивных фильтров вместо первичных A -параметров обычно используют **вторичные параметры**, которые называются *постоянной передачи* g_c и *характеристическим сопротивлением* Z_c . Если фильтр симметричный, то его уравнения в характеристических параметрах записываются в виде:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} g_c + \dot{I}_2 Z_c \operatorname{ch} g_c, \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \operatorname{ch} g_c + \dot{U}_2 \operatorname{ch} g_c / Z_c, \end{cases} \quad (27.2)$$

откуда следует, что $A_{11} = A_{22} = \operatorname{ch} g_c$, $A_{12} = Z_c \operatorname{sh} g_c$, $A_{21} = \operatorname{sh} g_c / Z_c$.

Для несимметричных фильтров используют два значения характеристических сопротивлений Z_{c1} , Z_{c2} , а для симметричных — одно, так как $Z_{c1} = Z_{c2} = Z_c$. Физический смысл этих вторичных параметров можно легко установить из уравнений (27.2).

Найдем входное сопротивление фильтра, пользуясь уравнениями (27.2)

$$Z_{\text{вх}} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2 \operatorname{ch} g_c + \dot{I}_2 Z_c \operatorname{sh} g_c}{\dot{I}_2 \operatorname{ch} g_c + \dot{U}_2 \operatorname{sh} g_c / Z_c} = Z_c \frac{Z_2 + Z_c \operatorname{th} g_c}{Z_c + Z_2 \operatorname{th} g_c}, \quad (27.3)$$

где $Z_2 = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$ — сопротивление нагрузки фильтра.

Если фильтр нагружен на характеристическое сопротивление $Z_2 = Z_c$, то в соответствии с (27.3) его входное сопротивление имеет значение

$$Z_{\text{вх}} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = Z_c,$$

т. е. сопротивление нагрузки повторяется на входе фильтра.

Такой режим работы фильтра называется **согласованным**. В этом режиме уравнения (27.2) принимают вид

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^{Rc}, \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 e^{Rc}. \end{cases} \quad (27.4)$$

Из уравнений (27.4) следует, что в согласованном режиме комплексный коэффициент передачи фильтра по напряжению определяется уравнением

$$\dot{K}_U = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = e^{-Rc} = e^{-(b_c + ja_c)} = e^{-b_c} e^{-ja_c}, \quad (27.5)$$

где $g_c = b_c + ja_c$ — комплексная постоянная передачи фильтра;
 b_c — постоянная затухания, a_c — постоянная фазы.

Таким образом, для пропускаемых сигналов можно считать

$$\dot{K}_U = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = e^{-b_c} = 1. \quad (27.6)$$

Для сигналов других частот $K_U < 1$ (или $b_c > 0$), поэтому условно считают, что фильтр эти сигналы не пропускает. В действительности же фильтр лишь ослабляет эти сигналы в K_U раз.

Таким образом, реальный фильтр тем лучше выполняет задачу частотно-го разделения сигналов, чем больше затухание b_c в полосе непропускания. По аналогии с оптическими фильтрами эту полосу частот иногда называют полосой непрозрачности. В свою очередь, полосу пропускания часто называют полосой прозрачности фильтра. При этом полагают, что в полосе прозрачности $b_c = 0$ (или во всяком случае достаточно мало).

Из этого определения вытекает способ аналитического определения полосы прозрачности фильтра: в полосе прозрачности фильтра вещественная часть постоянной передачи фильтра $g_c = b_c + ja_c$ должна быть равна нулю, т. е. полагают, что $b_c = 0$ и, следовательно, $g_c = ja_c$.

Следует отметить, что выполнение этих условий возможно при полном отсутствии в фильтре потерь, т. е. в фильтре, составленном только из реактивных элементов (индуктивностей и емкостей). В фильтрах с потерями (т. е. содержащих еще и сопротивления) выполнение этого условия принципиально невозможно.

В связи с этим пассивные фильтры обычно делят на две группы: реактивные LC-фильтры (т. е. без потерь) и RC-фильтры, которые состоят из сопротивлений и емкостей. Индуктивности в таких фильтрах практически не используются.

Условие для полосы пропускания реактивного фильтра. Из уравнения (27.3) можно получить значения входного сопротивления фильтра в двух частых режимах — в режиме холостого хода (при $Z_2 = \infty$) и в режиме короткого замыкания на его выходе (при $Z_2 = 0$)

$$\begin{cases} Z_{\kappa} = Z_c \operatorname{ch} g_c g_c = Z_c / \operatorname{th} g_c, \\ Z_{\infty} = Z_c \operatorname{th} g_c, \end{cases} \quad (27.7)$$

откуда следует, что

$$\operatorname{th} g_C = \sqrt{\frac{Z_K}{Z_X}}, \quad (27.8)$$

$$Z_C = \sqrt{Z_K Z_X}, \quad (27.8a)$$

где: Z_K и Z_X — входные сопротивления четырехполюсника в режимах короткого замыкания и холостого хода на его выходе, соответственно.

Для реактивных четырехполюсников сопротивления Z_K и Z_X являются мнимыми величинами, поэтому выражение (27.1) можно представить в виде

$$\operatorname{th} ja_C = j \operatorname{tg} a_C, \quad (27.9)$$

откуда следует, что в полосе прозрачности фильтра должно выполняться условие

$$-\infty < \frac{Z_K}{Z_X} < 0, \quad (27.10)$$

которое в общем виде определяет полосу пропускания.

Цепочечные фильтры. Схемы цепочечных фильтров приведены на рис. 27.2, а, б. Эти схемы можно рассматривать как цепочки канонических филь-

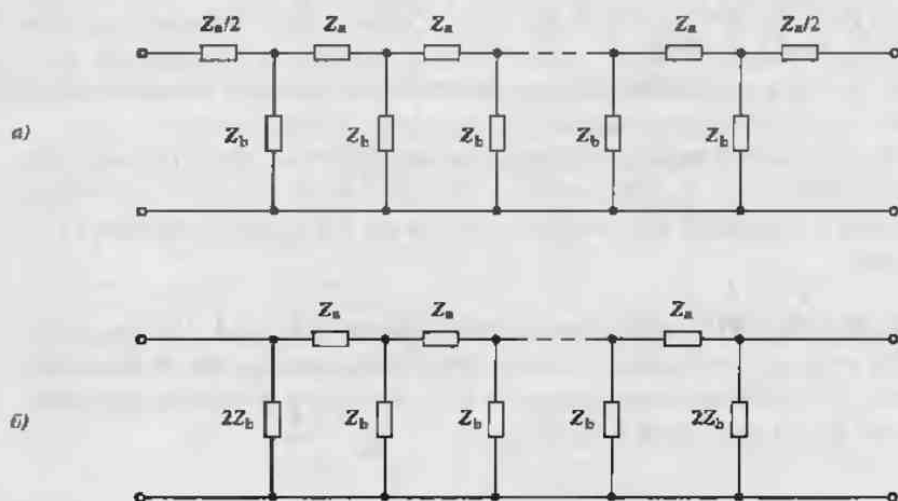


Рис. 27.2. Схемы цепочечных фильтров: из звеньев Т-типа (а) и П-типа (б)

ров, включенных каскадным способом. В качестве таких канонических фильтров могут быть использованы четыре различные схемы, которые приведены на рис. 27.3.

Две первые схемы (рис. 27.3, а, б) являются Г-образными несимметричными четырехполюсниками. Две другие схемы (рис. 27.3, в, г) относятся к симметричным Т- и П-образным четырехполюсникам. Поскольку симметричные звенья проще и удобнее для анализа, то они обычно и используются в качестве канонических звеньев.

При использовании в качестве канонических схем Т-образных звеньев (рис. 27.3, в), получим цепочечный фильтр, который начинается и кончается продольными сопротивлениями $Z_A/2$. Если же в качестве канонических схем используются П-образные звенья (рис. 27.3, г), то цепочечный фильтр будет начинаться и кончаться поперечными сопротивлениями $2Z_B$. Выбор типа звеньев определяется типом источника сигнала.

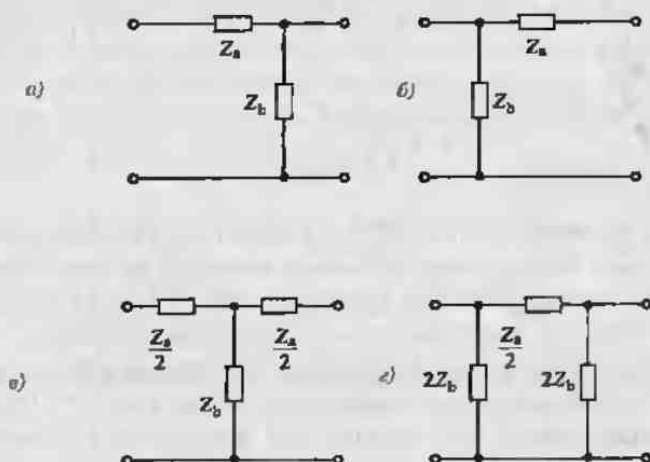


Рис. 27.3. Схемы канонических звеньев: Г-типа (а, б), Т-типа (в), и П-типа (г)

Определим характеристические параметры для симметричных канонических схем. Для этого вначале рассчитаем сопротивления $Z_{КТ}$ и $Z_{ХТ}$ для канонического Т-образного звена, пользуясь схемой рис. 27.3, в

$$\left\{ \begin{aligned} Z_{КТ} &= \frac{Z_a}{2} + \left(\frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_a} \right)^{-1} = \frac{Z_a}{2} \frac{1 + 4Z_b/Z_a}{1 + 2Z_b/Z_a}, \end{aligned} \right. \quad (27.11)$$

$$\left\{ \begin{aligned} Z_{ХТ} &= \frac{Z_a}{2} + Z_b = \frac{Z_a}{2} (1 + 2Z_b/Z_a). \end{aligned} \right. \quad (27.11a)$$

Подставив значения сопротивлений (27.11) в формулы (27.8) и (27.8а), получим значения характеристических параметров

$$\operatorname{th} g_{CT} = \frac{Z_{KT}}{Z_{XT}} = \frac{1+4Z_b/Z_a}{1+2Z_b/Z_a}, \quad (27.12)$$

$$Z_{CT} = \frac{Z_a}{2} (1+4Z_b/Z_a). \quad (27.13)$$

Аналогично можно рассчитать характеристические параметры для звеньев П-типа

$$\operatorname{th} g_{CP} = \frac{Z_{KP}}{Z_{XP}} = \frac{1+4Z_b/Z_a}{1+2Z_b/Z_a}, \quad (27.14)$$

$$Z_{CP} = \frac{2Z_b}{1+4Z_b/Z_a}. \quad (27.15)$$

Из сравнения уравнений (27.12)–(27.15) следует, что постоянная передачи g_C определяется только построением исходной схемы, а не способом деления ее на канонические звенья. Поэтому уравнения (27.12) и (27.14) совпадают. Однако характеристические сопротивления у этих схем различные.

Поскольку в полосе прозрачности фильтра постоянная передачи является мнимой величиной, то подкоренное выражение в формулах (27.12) и (27.14) должно быть отрицательным, т. е. для полосы пропускания должно выполняться условие

$$-\infty < 1+4Z_b/Z_a < 0, \quad (27.16)$$

что эквивалентно выполнению неравенства

$$1 < -4Z_b/Z_a < \infty. \quad (27.16a)$$

В полосе непрозрачности фильтра постоянная передачи g_C является комплексной величиной, а постоянная затухания отлична от нуля ($b_C \neq 0$). Рассмотрим теперь простейшие пассивные фильтры типа К и определим условия их работы.

Фильтр нижних частот типа К. Схема цепочечного фильтра нижних частот типа К приведена на рис. 27.4. *а*. В продольных звеньях этого фильтра включены индуктивности L , а в поперечных — емкости C . Комплексные сопротивления этих звеньев имеют значения: $Z_a = j\omega L$, $Z_b = 1/(j\omega C)$. Подставив значения этих сопротивлений в формулу (27.16а), получим условие для полосы пропускания фильтра

$$1 < -4Z_b/Z_a = 4/(\omega^2 LC) < \infty. \quad (27.17)$$

Обозначим величину $\omega_c = 2/\sqrt{LC}$ (обычно называют частотой среза фильтра), а условие для полосы пропускания запишем в виде

$$0 < \omega < \omega_c. \quad (27.17a)$$

В полосе прозрачности этого фильтра $b_c = 0$, а $K_U = 1$. В полосе непрозрачности $a_c = 0$. Частотная характеристика коэффициента передачи и постоянной затухания такого фильтра приведены на рис. 27.4. *б*. Из этих характеристик видно, что полоса прозрачности этого фильтра простирается от 0 до ω_c . В пределах этой полосы модуль коэффициента передачи равен 1, т. е. сигнал проходит на выход фильтра без ослабления. За пределами полосы прозрачности ослабление сигнала растет с ростом частоты.

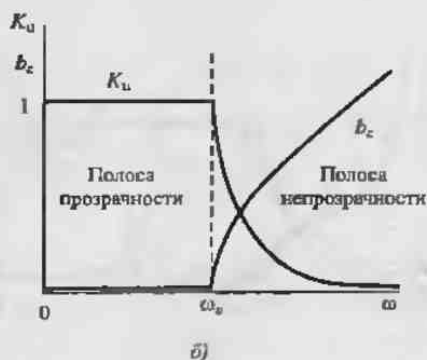
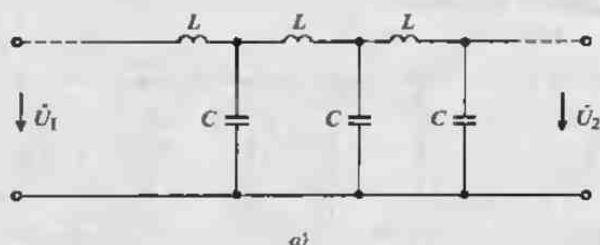


Рис. 27.4. Схема цепочечного фильтра нижних частот (*а*) и его характеристики (*б*)

Фильтр верхних частот типа К. Схема цепочечного фильтра верхних частот типа К приведена на рис. 27.5, а. В продольных звеньях этого фильтра включены емкости C , а в поперечных — индуктивности L , поэтому комплексные сопротивления фильтра имеют значения $Z_a = (j\omega C)^{-1}$, $Z_b = j\omega L$. Подставив значения комплексных сопротивлений в уравнение (27.16а), получим условие для полосы пропускания

$$1 < -4Z_b/Z_a = 4\omega^2 LC < \infty. \quad (27.18)$$

Вводя обозначение частоты среза $\omega_c = 1/(2\sqrt{LC})$, получим условие для полосы прозрачности в виде

$$\omega_c < \omega < \infty. \quad (27.18a)$$

Графики частотных характеристик модуля коэффициента передачи K_u и постоянной затухания b_c фильтра верхних частот приведены на рис. 27.5, б. Из этих характеристик видно, что полоса прозрачности фильтра верхних частот лежит в пределах от частоты среза и до бесконечно высокой частоты. В пределах этой полосы частот фильтр не ослабляет сигнал, поступающий на его вход. За пределами полосы пропускания фильтр ослабляет сигнал. Это ослабление тем выше, чем ниже значении частоты. На постоянном напряжении ослабление становится бесконечно большим.

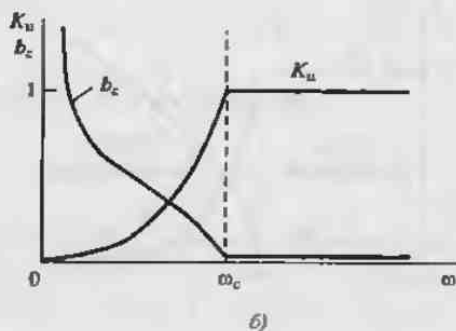
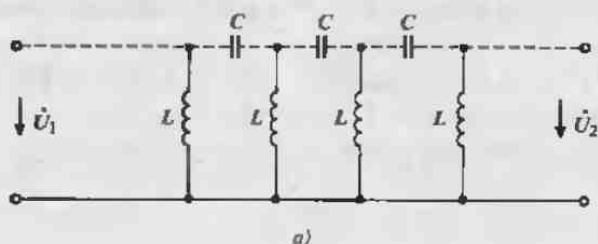


Рис. 27.5. Схема цепочечного фильтра верхних частот (а) и его характеристики (б)

Полосовой фильтр типа К. Схема одного звена полосового фильтра типа К приведена на рис. 27.6, а. Особенностью полосового фильтра является наличие ограниченной с двух сторон полосы прозрачности фильтра. Для определения частот среза полосового фильтра воспользуемся уравнением (27.16а), которое разделим на два отдельных граничных условия

$$\begin{cases} 4Z_b / Z_a = 1, & (27.19) \\ 4Z_b / Z_a = \infty. & (27.19a) \end{cases}$$

Сопротивления продольного и поперечного звеньев фильтра для схемы, изображенной на рис. 27.6, а, имеют значения

$$Z_a = j\omega L_1 + 1/(j\omega C_1) = (1 - \omega^2 L_1 C_1)/(j\omega C_1),$$

$$Z_b = [j\omega C_2 + 1/(j\omega L_2)]^{-1} = j\omega L_2 / (1 - \omega^2 L_2 C_2),$$

откуда находим

$$Z_b/Z_a = -\omega^2 L_2 C_1 / [(1 - \omega^2 L_1 C_1)(1 - \omega^2 L_2 C_2)]. \quad (27.20)$$

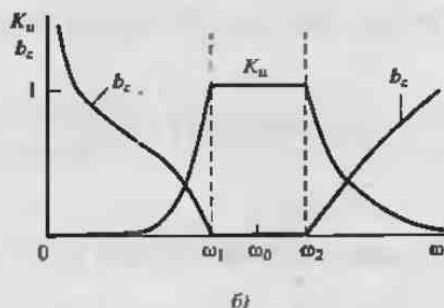
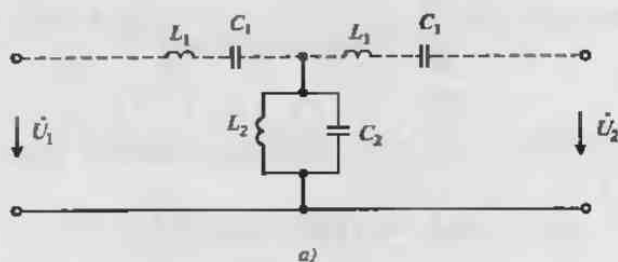


Рис. 27.6 Схема цепочечного полосового фильтра (а) и его характеристики (б)

В дальнейших расчетах будем считать, что последовательные и параллельный контуры имеют одинаковые резонансные частоты

$$\omega_0 = (L_1 C_1)^{-1/2} = (L_2 C_2)^{-1/2}. \quad (27.21)$$

Поэтому уравнение (27.20) принимает вид

$$Z_b / Z_n = -\frac{\omega^2 L_2 C_1}{(1 - \omega^2 / \omega_0^2)^2}. \quad (27.22)$$

После подстановки значения (27.22) в уравнение (27.19) получим

$$\frac{4\omega^2 L_2 C_1}{(1 - \omega^2 / \omega_0^2)^2} = 1,$$

откуда находим уравнение для расчета частот среза

$$\omega^2 \pm 2\omega\omega_0^2 \sqrt{L_2 C_1} - \omega_0^2 = 0,$$

или

$$\omega^2 \pm 2\omega\omega_0^2 \sqrt{m} - \omega_0^2 = 0, \quad (27.23)$$

где $m = L_2/L_1$.

Решение уравнения (27.23) дает следующие значения частот среза

$$\omega_{1,2} = \omega_0 (\pm \sqrt{m} \pm \sqrt{m+1}).$$

Сохраняя только положительные значения частот, находим окончательные значения частот среза

$$\omega_1 = \omega_0 (\sqrt{m+1} - \sqrt{m}), \quad (27.24)$$

$$\omega_2 = \omega_0 (\sqrt{m+1} + \sqrt{m}). \quad (27.24a)$$

Рассмотрим теперь второе граничное условие (27.19а), из которого следует, что

$$\frac{\omega^2 L_2 C_1}{(1 - \omega^2 / \omega_0^2)^2} = \infty.$$

Это условие удовлетворяется только при $\omega = \omega_0$. Однако полученное решение не даст нового значения частоты среза, так как частота ω_0 находится между частотами ω_1 и ω_2 , в чем можно убедиться перемножив частоты ω_1 и ω_2 , откуда следует, что

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}.$$

Частотная характеристика полосового фильтра приведена на рис. 27.6, б.

Заграждающий фильтр типа К. Рассмотрим еще один тип фильтра типа К, который называется заграждающим (или режекторным). Он имеет частотную характеристику прямо противоположную полосовому фильтру и характеризуется тем, что его *полоса непрозрачности* расположена между частотами среза ω_1 и ω_2 , т. е. там, где располагается полоса прозрачности полосового фильтра. Схема одного звена заграждающего фильтра типа К приведена на рис. 27.7, а.

Найдем частоты среза заграждающего фильтра, пользуясь уравнением (27.16а). Для этого определим сопротивления продольного и поперечного звеньев для схемы, приведенной на рис. 27.7, а, полагая, что резонансные частоты этих звеньев одинаковые и имеют значения

$$\omega_1 = \omega_2 = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 1/\sqrt{L_2 C_2},$$

откуда получаем

$$Z_o = j\omega L_1 / (1 - \omega^2 L_1 C_1) = j\omega L_1 / (1 - \omega^2 / \omega_0^2), \quad (27.25)$$

$$Z_b = (1 - \omega^2 L_2 C_2) / (j\omega C_2) = (1 - \omega^2 / \omega_0^2) / (j\omega C_2). \quad (27.25а)$$

Подставив значения этих сопротивлений в уравнение (27.16а), найдем условие для полосы прозрачности заграждающего фильтра в виде

$$-4Z_b/Z = 1 \text{ или } 4(1 - \omega^2 / \omega_0^2) / (\omega^2 L_1 C_2) = 1. \quad (27.26)$$

Решение уравнения (27.26) приводит к следующим значениям частот среза фильтра

$$\omega_{1,2} = \pm \omega_0 / m \pm \sqrt{\omega_0^2 / m^2 + \omega_0^2}. \quad (27.27)$$

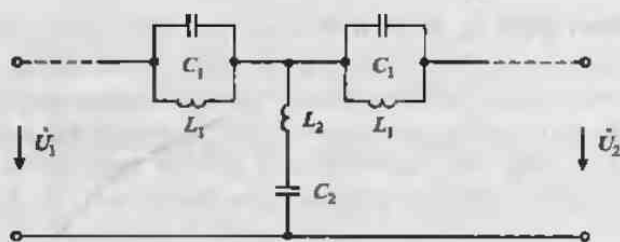
Из уравнения (27.27) можно найти два положительных значения частот среза заграждающего фильтра

$$\omega_1 = \omega_0 \left(\sqrt{1/m + 1} - 1/m \right),$$

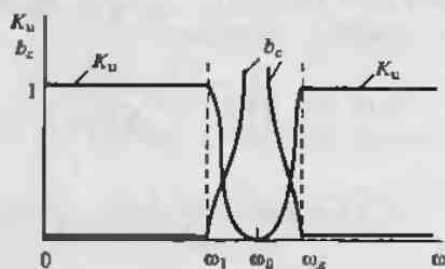
$$\omega_2 = \omega_0 \left(\sqrt{1/m + 1} + 1/m \right),$$

где $m = L_2/L_1$.

Частотная характеристика коэффициента передачи и постоянной затухания заграждающего фильтра приведены на рис. 27.7, б.



а)



б)

Рис. 27.7. Схема цепочечного заграждающего фильтра (а) и его характеристики (б)

Влияние количества звеньев на характеристики фильтров. Рассмотрим каскадное включение звеньев фильтра, показанное на рис. 27.7, а. Если для этой цепочки выполнено условие согласования, то каждое звено нагружено на входное сопротивление смежного звена, которое равно характеристическому сопротивлению $Z_2 = Z_c$, поэтому для этой схемы можно записать общий коэффициент передачи в виде:

$$K_n = \frac{\dot{U}_{n+1}}{\dot{U}_1} = e^{-G_c} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_2} \dots \frac{\dot{U}_{n+1}}{\dot{U}_n} = e^{-g_{c1}} e^{-g_{c2}} \dots e^{-g_{cn}}. \quad (27.28)$$

Из уравнения (27.25) следует, что значение общей постоянной передачи цепочечного включения n звеньев фильтров равно сумме постоянных передач отдельных звеньев, т. е.

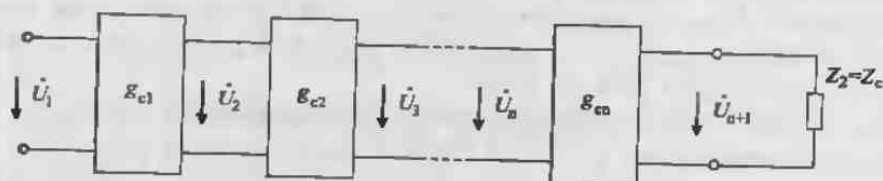
$$G_c = \sum_{k=1}^n g_{ck}.$$

При n одинаковых звеньев фильтра общее значение постоянной передачи увеличивается в n раз

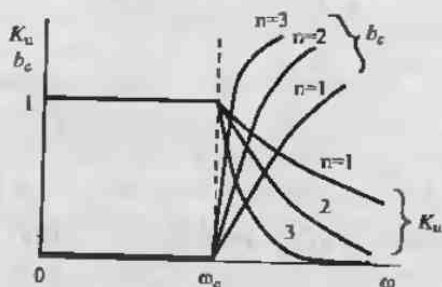
$$G_c = n g_c. \quad (27.29)$$

Увеличение количества звеньев фильтра приводит к увеличению крутизны границы раздела полос прозрачности и непрозрачности.

Влияние количества звеньев на частотную характеристику цепочечного фильтра приведено на рис. 27.8.



а)



б)

Рис. 27.8. Многозвенный цепочечный фильтр (а) и влияние числа звеньев на его характеристики (б)

Влияние нагрузки фильтра на его характеристику. Нагрузка фильтра влияет на условия его согласования. Поскольку при анализе характеристик фильтра предполагалось, что фильтр согласован с нагрузкой, то следует определить, как выполняется условие согласования при постоянной нагрузке фильтра.

Для этого рассмотрим фильтр нижних частот и найдем его характеристическое сопротивление для Т- и П-образных звеньев

$$Z_{CT} = \sqrt{Z_{KT} Z_{XT}} = \sqrt{L/C} \sqrt{1 - \omega^2 / \omega_c^2}, \quad (27.30)$$

$$Z_{CP} = \sqrt{Z_{KP} Z_{XP}} = \sqrt{L/C} / \sqrt{1 - \omega^2 / \omega_c^2}. \quad (27.30a)$$

Из рассмотрения формул (27.30) и (27.30a) можно сделать следующие выводы:

- характеристическое сопротивление фильтра зависит от частоты,
- частотная зависимость характеристического сопротивления зависит от структуры его звеньев,
- характеристическое сопротивление вещественное в полосе прозрачности и мнимое в полосе непрозрачности фильтра.

Частотные зависимости характеристического сопротивления для фильтров нижних частот приведены на рис. 27.9. Для звена типа Т характеристическое сопротивление в полосе прозрачности уменьшается при приближении к частоте среза фильтра (рис. 27.9, а), а для звена типа П — оно растет при приближении к частоте среза (рис. 27.9, б).

На высокой частоте характеристическое сопротивление становится реактивным и изменяется, как показано в заштрихованной части рис. 27.9

$$Z_{CT} |_{\omega \rightarrow \infty} = j\omega L / 2,$$

$$Z_{CP} |_{\omega \rightarrow \infty} = -j2 / \omega C.$$

Это показывает, что подобрать такое сопротивление нагрузки фильтра очень трудно, поэтому на практике в качестве нагрузки обычно используют постоянное сопротивление, не зависящее от частоты. Так, например, для фильтра нижних частот таким сопротивлением может быть $R_n = \sqrt{L/C}$, которое наилучшим образом удовлетворяет условиям согласования в диапазоне частот, далеких от частоты среза. При приближении к частоте среза условия согласования нарушаются и частотная характеристика фильтра будет отличаться от расчетной.

RC-фильтры. В ряде случаев используются RC-фильтры, которые не содержат катушек индуктивностей. В этих фильтрах вместо индуктивностей ис-

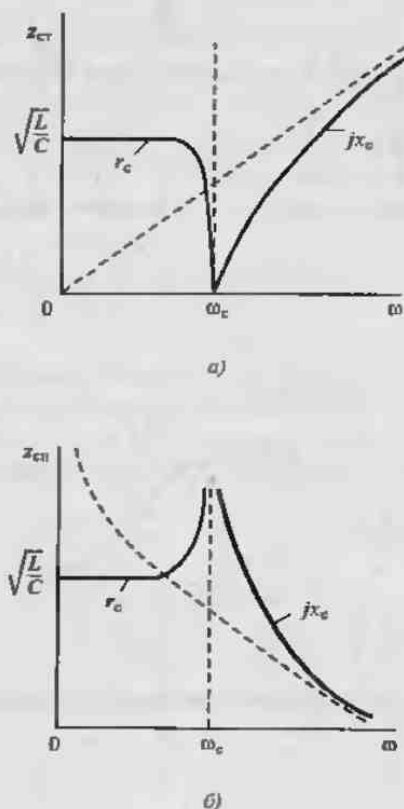


Рис. 27.9. Зависимость характеристического сопротивления фильтра от частот для звена Т-типа (а) и звена П-типа (б)

пользуют сопротивления. К недостаткам таких фильтров следует отнести наличие в этих фильтрах потерь, которые теоретически отсутствовали в реактивных фильтрах.

RC-фильтры так же, как и LC-фильтры можно разделить по характеристикам на фильтры нижних частот, верхних частот, полосовые и заграждающие. Несмотря на существенные недостатки RC-фильтры широко применяются, особенно в электронике, благодаря своей простоте и малым габаритам.

Не выполняя подробного анализа свойств RC-фильтров, рассмотрим их основные схемы и частотные характеристики без учета влияния нагрузки.

Типовые схемы RC-фильтров нижних частот приведены на рис. 27.10, а. Для этих фильтров частота среза может быть определена по формуле $\omega_c = 4/RC$. Частотная характеристика этих фильтров приведена на рис. 27.10, б.

Типовые схемы Т- и П-образных фильтров верхних частот приведены на рис. 27.11, а. Для этих фильтров частота среза может быть определена по формуле $\omega_c = 1/(4RC)$. Частотная характеристика этих фильтров приведена на рис. 27.11, б.

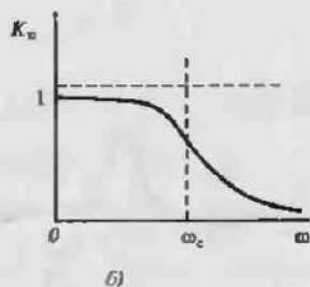
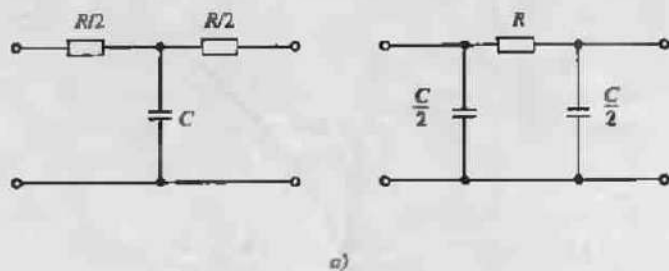


Рис. 27.10. Звенья Т- и П-типа RC-фильтра НЧ (а) и их частотная характеристика (б)

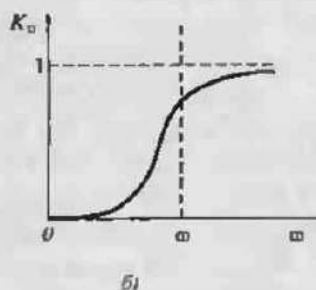
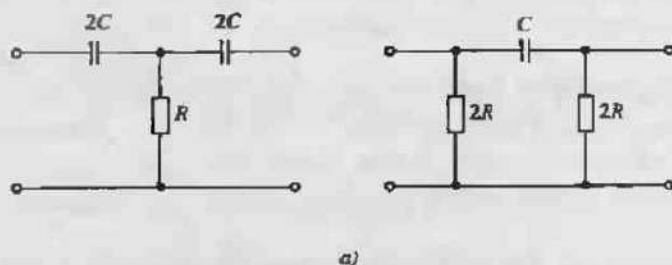
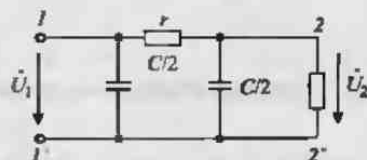


Рис. 27.11. Звенья Т- и П-типа RC-фильтра ВЧ (а) и их частотная характеристика (б)

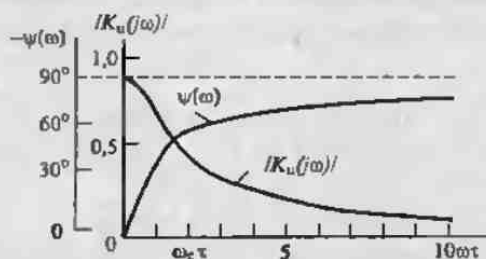
Кроме этого имеется много фильтров, частотные характеристики которых соответствуют полосовым и заграждающим фильтрам. В связи с тем, что такие звенья обычно используются в цепях обратной связи активных фильтров, их схемы и расчетные формулы будут приведены в лекции 28. Применение RC-фильтров в активных фильтрах позволяет компенсировать потери в сопротивлениях за счет внешних источников питания активных элементов — транзисторов или операционных усилителей.

Ниже приводится пример расчета коэффициента передачи однозвенного RC-фильтра низких частот.

Пример 27.1. Рассчитать коэффициент передачи напряжения K_u звена RC-фильтра низких частот, изображенного на рис. 27.12а, нагруженного на сопротивление $r_{н}$, полагая $r/r_{н} = 0,1$. Построить амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики K_u в функции от относительной частоты $\omega\tau$, где $\tau = rC/2$.



а)



б)

Рис. 27.12. Схема RC-фильтра к примеру 27.1 (а) и его частотные характеристики (б)

Решение Для определения коэффициента передачи K_u воспользуемся уравнениями четырехполюсника в Y-параметрах. Для этого определим Y-параметры четырехполюсника, используя параметры элементов схемы, изображенной на рис. 27.12, а: $-Y_{21} = 1/r = g$; $Y_{12} - Y_{21} = 0$; $Y_{11} + Y_{12} = j\omega C/2$; $Y_{22} + Y_{12} = j\omega C/2$, откуда находим: $Y_{11} = Y_{22} = j\omega C/2 - Y_{12} = -g + j\omega C/2$; $Y_{12} - Y_{21} = g$.

Коэффициент передачи напряжения найдем по формуле

$$\begin{aligned} \dot{K}_n &= \frac{Y_{21}}{Y_{22} + g_n} = \frac{g}{g + g_n + j\omega C/2} = \frac{g}{g(1 + g_n/g + j\omega C/2)} = \\ &= \frac{1}{1 + g_n/g + j\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{(1 + g_n/g)^2 + (\omega\tau)^2}} e^{-j\psi(\omega\tau)}, \end{aligned}$$

где $\psi(\omega\tau) = \text{arctg} [\omega\tau / (1 + g_n/g)]$ — аргумент \dot{K}_n .

Задавая значениями относительной частоты $\omega\tau$ в пределах от 0 до 10 по полученным формулам рассчитаем зависимости $|\dot{K}_n| = f(\omega\tau)$ и $\psi(\omega\tau)$. Графики частотных зависимостей изображены на рис. 27.12, б. Полученные частотные зависимости показывают, что низкочастотные колебания, для которых $\omega\tau < 0,5$, почти не ослабляются фильтром. В то же время высокочастотные колебания существенно ослаблены фильтром.

Лекция 28. Активные электрические фильтры

Особенности и назначение активных фильтров. Активный фильтр представляет собой четырехполюсник, содержащий пассивные RC -цепи и активные элементы: транзисторы, электронные лампы или операционные усилители. Активные фильтры обычно не содержат катушек индуктивности. Стремление исключить катушки индуктивности из фильтра вызвано рядом причин:

- катушки индуктивности имеют большие габариты и массу;
- потери в катушках приводят к отклонению расчетных характеристик фильтра от реальных значений;
- в катушках рассеивается большая мощность;
- в катушках с сердечником проявляется нелинейный эффект, связанный с насыщением сердечника. Активные фильтры можно реализовать на повторителях напряжения, на операционных усилителях, на усилителях с ограниченным усилением и др.

Пассивные частотные фильтры, рассмотренные в лекции 27, выполняются на LC - или на RC -цепях без применения усилительных активных элементов. Такие фильтры не требуют источников питания и имеют простое исполнение, однако они не обеспечивают хорошего разделения полосы пропускания от полосы затухания; в областях пропускания и затухания могут наблюдаться большие неравномерности передаточной характеристики; очень сложно выполнить условие согласования фильтра с нагрузкой.

В отличие от пассивных, активные фильтры обеспечивают более качественное разделение полос пропускания и затухания. В них сравнительно просто можно регулировать неравномерности частотной характеристики в областях пропускания и затухания, не предъявляясь жестких требований к согласованию нагрузки с фильтром. Все эти преимущества активных фильтров обеспечили им самое широкое применение.

Классификация активных фильтров. Активные фильтры можно разделить на группы по различным признакам: назначению, полосе пропускаемых частот, типу усилительных элементов, виду обратных связей и др. По полосе пропускаемых частот фильтры делятся на четыре основные группы: нижних частот, верхних частот, полосовые и заграждающие. Фильтры нижних частот пропускают сигналы от постоянного напряжения до некоторой предельной частоты, называемой частотой среза фильтра. Фильтры верхних частот, наоборот, пропускают сигналы, начиная с частоты среза и выше. Полосовые фильтры пропускают сигналы в некоторой полосе частот от f_1 до f_2 , а заграждающие фильтры имеют характеристику, противоположную полосовым, и пропускают сигналы с частотой ниже f_1 и выше f_2 . Как полосовые, так и заграждающие фильтры могут иметь гребенчатую частотную характеристику, в которой будет несколько полос пропускания и затухания.

По назначению фильтры делятся на сглаживающие фильтры источников питания, заграждающие фильтры помех, фильтры для селективных усилителей низкой или высокой частоты и др.

По типу усилительных элементов можно выделить транзисторные фильтры, фильтры на усилителях с ограниченным усилением, на операционных усилителях, на повторителях напряжения и др. Все рассмотренные фильтры могут иметь одну цепь обратной связи или несколько. В связи с этим различают фильтры с одноконтурной и с многоконтурной обратной связью. Кроме этого, различают фильтры по числу полюсов на частотной характеристике — фильтры первого порядка, второго и более высоких порядков. Фильтры высоких порядков имеют более крутые границы полос пропускания и затухания и более плоскую характеристику в области полосы пропускания. К таким фильтрам относятся фильтры Чебышева, Баттерворта, Бесселя и др.

Широкие возможности активных RC -фильтров связаны с использованием в них активных элементов. Цепи, содержащие только сопротивления и емкости, имеют полюсы передаточной функции на отрицательной действительной полуоси комплексной плоскости $s = \sigma + j\omega$, что ограничивает возможности создания фильтров. В отличие от пассивных, активные RC -фильтры (ARC -фильтры) могут иметь полюсы в любой части комплексной плоскости. Однако схемы с полюсами в правой полуплоскости неустойчивы, поэтому в активных фильтрах используются только те схемы, полюсы передаточной функции которых располагаются в левой полуплоскости или на оси $j\omega$.

Активные фильтры на операционных усилителях с одноконтурной обратной связью. Схема активного фильтра на ОУ с одноконтурной обратной связью приведена на рис. 28.1. Она состоит из двух пассивных четырехполюсников *A* и *B* и операционного инвертирующего усилителя ОУ. Четырехполюсник *A* включен между входом фильтра и входом операционного усилителя, а четырехполюсник *B* включен в цепи обратной связи между входом и выходом ОУ. При анализе схем будем считать ОУ идеальным и инвертирующим.

Передаточную функцию для схемы, приведенной на рис. 28.1, можно получить, используя уравнения четырехполюсников в \dot{U} -параметрах:

$$\begin{cases} \dot{i}_{1a} = Y_{11a}\dot{U}_{1a} + Y_{12a}\dot{U}_{2a} \\ \dot{i}_{2a} = Y_{21a}\dot{U}_{1a} + Y_{22a}\dot{U}_{2a}, \text{ где } Y_{12a} = Y_{21a} \end{cases} \quad (28.1)$$

и

$$\begin{cases} \dot{i}_{1b} = Y_{11b}\dot{U}_{1b} + Y_{12b}\dot{U}_{2b} \\ \dot{i}_{2b} = Y_{21b}\dot{U}_{1b} + Y_{22b}\dot{U}_{2b}, \text{ где } Y_{12b} = Y_{21b} \end{cases} \quad (28.2)$$

где $Y_{12} = \frac{\dot{i}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{U_1=0}$ — проводимость обратной передачи при коротком замыкании на входе;

$Y_{21} = \frac{\dot{i}_2}{\dot{U}_1} \Big|_{U_2=0}$ — проводимость прямой передачи при коротком замыкании на выходе.

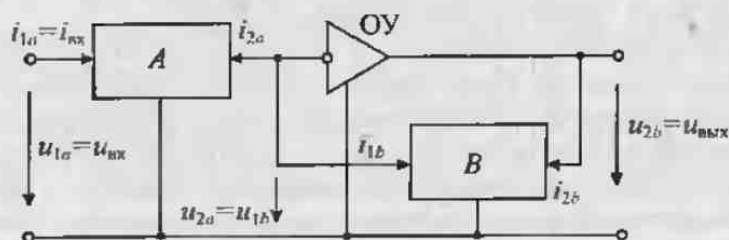


Рис. 28.1. Схема активного фильтра на ОУ с одноконтурной обратной связью

Поскольку для идеального ОУ $u_{вх}=0$ и $i_{вх}=0$, то $u_{2a}=u_{1b}=0$; $i_{2a}=-i_{1b}$ и уравнения (28.1) и (28.2) упрощаются и приводятся к виду

$$\begin{cases} \dot{i}_{1a} = Y_{11a} \dot{U}_{1a}, \\ \dot{i}_{2a} = Y_{21a} \dot{U}_{1a}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{i}_{1b} = Y_{12b} \dot{U}_{2b}, \\ \dot{i}_{2b} = Y_{22b} \dot{U}_{2b}. \end{cases}$$

откуда получаем, что

$$Y_{12b} \dot{U}_{1a} = -Y_{21a} \dot{U}_{2b}. \quad (28.3)$$

Из уравнения (28.3) найдем коэффициент передачи фильтра по напряжению

$$K_u = \frac{\dot{U}_{2b}}{\dot{U}_{1a}} = -\frac{Y_{12a}}{Y_{12b}} = -\frac{Y_{21a}}{Y_{21b}}, \quad (28.4)$$

который определяется отношением передаточных проводимостей пассивных четырехполосников A и B .


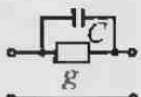
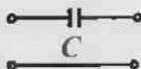


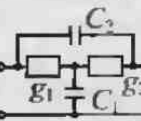
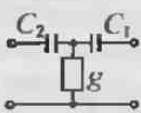
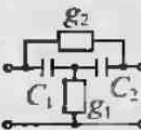
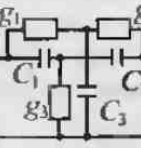
Так как четырехполосники A и B пассивные, то их полюсы лежат на отрицательной части действительной полуоси комплексной плоскости s . Если обе цепи имеют одинаковые полюсы, то знаменатели функций Y_{12a} и Y_{12b} сократятся и их полюсы не будут влиять на коэффициент передачи фильтра. В этом случае полюсы передаточной функции (28.4) будут определяться нулями передаточной проводимости Y_{12b} . При этом, поскольку нули передаточной проводимости пассивной RC -цепи могут лежать в любой точке комплексной плоскости s , оказывается возможным реализовать цепь с коэффициентом передачи, имеющим комплексно-сопряженные полюсы, как для колебательного контура. Однако для обеспечения устойчивости схемы эти полюсы должны лежать в левой части комплексной плоскости, т. е. вещественная часть комплексного полюса должна быть отрицательной.

Подобным же образом можно утверждать, что нули коэффициента передачи (28.4) будут определяться нулями передаточной проводимости Y_{12a} и, следовательно, можно получить любые требуемые действительные или комплексно-сопряженные нули коэффициента передачи фильтра. Таким образом, активный RC -фильтр с одноконтурной обратной связью в цепи идеального ОУ дает возможность получать коэффициент передачи практически с любыми нулями и полюсами.

Некоторые пассивные RC -цепи, используемые в активных фильтрах, приведены в табл. 28.1.

Фильтр нижних частот (ФНЧ) с одноконтурной обратной связью предназначен для выделения сигналов, частота которых ниже некоторой заданной

Пассивные четырехполюсники для активных фильтров

№	Схема цепи	Передаточная проводимость Y_{21}	Параметры
1		$-g$	$g = r^{-1}$
2		$-C(s+d)$	$d = \frac{g}{C}$
3		sC	
4		$-\frac{gs}{s+d}$	$d = \frac{g}{C}$
5		$-\frac{g_1 g_2}{C(s+d)}$	$d = \frac{g_1 + g_2}{C}$
6		$-\frac{C_2^2(s^2 + ds + \omega_0^2)}{s+d}$	$d = \frac{g_1 + g_2}{C_1}$ $\omega_0^2 = \frac{g_1 g_2}{C_1 C_2}$
7		$-\frac{s^2 C_1 C_2}{(C_1 + C_2)(s+d)}$	$d = \frac{g}{C_1 + C_2}$
8		$-\frac{C_1 C_2 (s^2 + s \frac{\omega_0^2}{d} + \omega_0^2)}{(C_1 + C_2)(s+d)}$	$d = \frac{g_1}{C_1 + C_2}$ $\omega_0^2 = \frac{g_1 g_2}{C_1 C_2}$
9		$-\frac{\frac{g_1 g_2}{C_3} (s+d_2) + s^2 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (s+d_1)}{(s+d_1)(s+d_2)}$	$d_1 = \frac{g_1 + g_2}{C_3}$ $d_2 = \frac{g_3}{C_1 + C_2}$

частоты, называемой частотой среза фильтра. ФНЧ практически без ослабления пропускает сигналы в полосе частот от постоянного напряжения до частоты среза и ослабляет сигналы, частота которых выше частоты среза.

В зависимости от числа полюсов в передаточной характеристике ФНЧ делят на однополюсные (первого порядка), двухполюсные (второго порядка) и многополюсные (высокого порядка). Схема ФНЧ первого порядка приведена на рис. 28.2, а. В этом фильтре четырехполюсник *A* выполнен на одном сопротивлении r_a , а четырехполюсник *B* содержит параллельно соединенные элементы r_b и C_b . Передаточная проводимость четырехполюсника *A* имеет значение $Y_{21a} = -g_a$, а четырехполюсника *B* — значение $Y_{21b} = -(g_b + j\omega C_b)$.

Коэффициент передачи ФНЧ по напряжению

$$K_u = \frac{Y_{21a}}{Y_{21b}} = -\frac{g_a}{g_b + j\omega C_b} = \frac{K_0 \omega_c}{j\omega + \omega_c}, \quad (28.5)$$

где $K_0 = g_a / g_b$ — коэффициент передачи фильтра на постоянном напряжении; $\omega_c = g_b / C_b$ — частота среза фильтра.

Модуль передаточной функции фильтра на синусоидальном сигнале равен

$$|K_u| = \frac{K_0}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}, \quad (28.6)$$

а его график приведен на рис. 28.2, б, откуда видно, что на частоте среза фильтр вносит затухание, равное $0,707 K_0$ (или 3 дБ).

Коэффициент передачи ФНЧ второго порядка в общем случае определяется выражением

$$K_u = -\frac{K_0 \omega_c^2}{s^2 + d\omega_c s + \omega_c^2}, \quad (28.7)$$

где K_0 — коэффициент передачи фильтра на постоянном напряжении;

ω_c — частота среза фильтра;

$d = Q^{-1}$ — затухание фильтра;

Q — его добротность.

Выражение (28.7) имеет два полюса

$$s_{1,2} = -\frac{d\omega_c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d\omega_c}{2}\right)^2 - \omega_c^2}, \quad (28.8)$$

откуда следует, что при $d < 2$ полюсы коэффициента передачи будут комплексно-сопряженными, а при $d > 2$ — вещественными. Амплитудно-частотные характеристики ФНЧ второго порядка для различных значений $d \leq 2$ приведены на рис. 20.3, а. При $d \rightarrow 0$ добротность $Q \rightarrow \infty$ и фильтр будет возбуждаться на частоте ω_c .

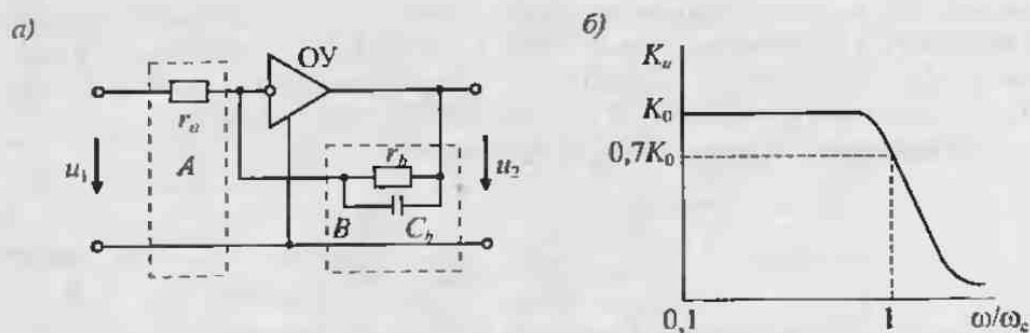


Рис. 28.2. Фильтр нижних частот с одноконтурной обратной связью первого порядка (а) и его амплитудно-частотная характеристика (б)

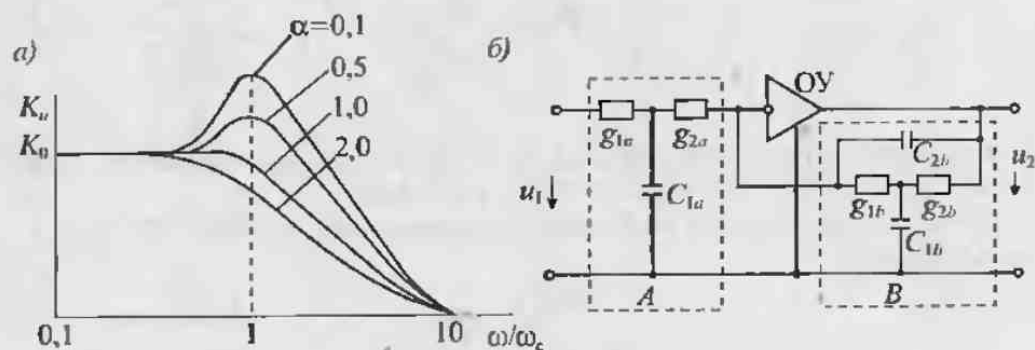


Рис. 28.3. Амплитудно-частотная характеристика ФНЧ второго порядка (а) и его схема (б)

Практическая реализация ФНЧ второго порядка возможна при использовании в качестве четырехполюсников A и B звеньев 5 и 6 из табл. 28.1. Схема такого фильтра приведена на рис. 20.3, б. При этом в соответствии с табл. 28.1 частота среза определяется выражением

$$\omega_c = (r_{1b} r_{2b} C_{1b} C_{2b})^{-1/2},$$

добротность фильтра

$$Q = d^{-1} = \left[\frac{C_{2b} (r_{1b} + r_{2b})^2}{C_{1b} r_{1b} r_{2b}} \right]^{-1/2}$$

а коэффициент передачи на постоянном напряжении

$$K_0 = \frac{r_{1b} + r_{2b}}{r_{1a} + r_{2a}}$$

Фильтр верхних частот (ФВЧ) с одноконтурной обратной связью предназначен для выделения сигналов, частота которых выше некоторой заданной частоты, называемой частотой среза фильтра. ФВЧ практически без ослабления пропускает сигналы выше частоты среза и ослабляет сигналы с частотой ниже частоты среза.

В зависимости от числа полюсов в передаточной характеристике ФВЧ делят на однополюсные (первого порядка) и двухполюсные (второго порядка). Схема ФВЧ первого порядка приведена на рис. 28.4, а. В этой схеме изменен только четырехполюсник *A*, в котором сопротивление r_a заменено емкостью C_a . Передаточные проводимости пассивных четырехполюсников имеют значения

$$Y_{21a} = -j\omega C_a; \quad Y_{21b} = -(g_b + j\omega C_b).$$

Коэффициент передачи фильтра определяется по формуле (20.4) и равен

$$K_u = \frac{Y_{21a}}{Y_{21b}} = -\frac{j\omega C_a}{g_b + j\omega C_b} = \frac{j\omega K_0}{\omega_c + j\omega}, \quad |K_u| = \frac{\omega K_0}{\sqrt{\omega_c^2 + \omega^2}}, \quad (28.9)$$

где $K_0 = C_a / C_b$ — коэффициент передачи фильтра на бесконечно высокой частоте ($\omega \rightarrow \infty$);

$\omega_c = (r_b C_b)^{-1}$ — частота среза фильтра.

Амплитудно-частотная характеристика ФВЧ первого порядка приведена на рис. 28.4, б. На частоте среза фильтра коэффициент передачи фильтра достигает значения $0,707K_0$.

Передаточная характеристика ФВЧ второго порядка определяется в общем случае выражением

$$K_u = \frac{K_0}{s^2 + d\omega_c s + \omega_c^2}, \quad (28.10)$$

которое имеет два полюса

$$p_{1,2} = \frac{d\omega_c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d\omega_c}{2}\right)^2 - \omega_c^2}$$

Амплитудно-частотная характеристика такого фильтра определяется формулой

$$|K_u| = \frac{K_0 \omega^2}{\sqrt{\omega^4 + \omega^4 \omega_c^2 (d^2 - 2) + \omega_c^4}} \quad (28.11)$$

и имеет вид, изображенный на рис. 28.5, а.

При значении $d < 2$ полюсы коэффициента передачи ФВЧ являются комплексно сопряженными, а при $d > 2$ — вещественными. Для получения максимально гладкой характеристики ФВЧ обычно выбирают $d = \sqrt{2}$. При этом наклон характеристики составляет 40 дБ на декаду.

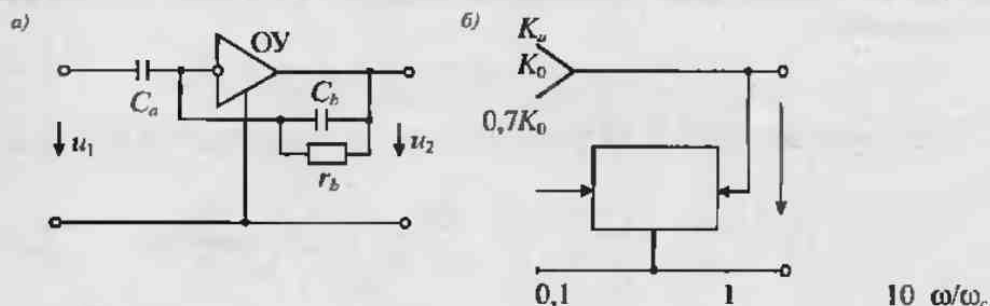


Рис. 28.4. Схема фильтра верхних частот первого порядка с одноконтурной обратной связью (а) и его амплитудно-частотная характеристика (б)

Практическая схема ФВЧ второго порядка приведена на рис. 28.5, б. Она получена при использовании в качестве четырехполюсников А и В звеньев 7 и 6, приведенных в табл. 28.1. В соответствии с характеристиками звеньев фильтра основные характеристики ФВЧ определяются выражениями:

- частота среза фильтра:

$$\omega_c = (r_{1b} r_{2b} C_{1b} C_{2b})^{-1/2};$$

- коэффициент передачи на высокой частоте:

$$K_0 = \frac{C_{1a} C_{2a}}{C_{2b} (C_{1a} + C_{2a})};$$

- добротность:

$$Q = d^{-1} = \left[\frac{C_{2b} (r_{1b} + r_{2b})^2}{C_{1b} r_{1b} r_{2b}} \right]^{-1/2}$$

Полосовой фильтр с одноконтурной обратной связью (ПФ) предназначен для выделения сигналов, частота которых лежит в пределах некоторой полосы $\omega_{01} < \omega < \omega_{02}$. При этом он практически без ослабления пропускает сигналы, лежащие в этой полосе, и ослабляет сигналы, частоты которых лежат за пределами полосы пропускания.

Полосовые фильтры бывают двухполосные (второго порядка) и многополосные (высокого порядка). Передаточная характеристика ПФ второго порядка определяется выражением

$$K_u = \frac{K_0 d \omega p}{s^2 + d \omega_0 s + \omega_0^2}, \quad (28.12)$$

которое имеет два комплексно-сопряженных полюса ω_{01} и ω_{02} .

Затухание фильтра и его добротность имеют значения

$$d = \frac{\omega_{02} - \omega_{01}}{\omega_0}; \quad Q = d^{-1} = \frac{\omega_0}{\omega_{02} - \omega_{01}},$$

где $\omega_0^2 = \omega_{01} \omega_{02}$.

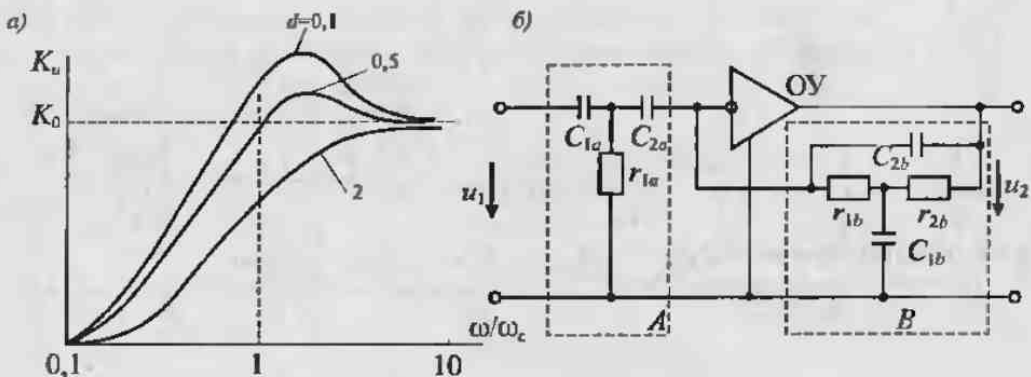


Рис 28.5. Амплитудно-частотная характеристика ФВЧ второго порядка (а) и его схема (б)

Максимальное усиление ПФ в полосе пропускания равно K_0 на частоте $\omega = \omega_0$. Комплексная амплитудно-частотная характеристика ПФ в соответствии с (28.12) определяется выражением

$$K_u(j\omega) = \frac{K_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}, \quad (28.13)$$

откуда получаем значение ее модуля

$$|K_u| = \frac{K_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}. \quad (28.14)$$

График амплитудно-частотной характеристики ПФ для двух значений добротности приведен на рис. 28.6, а. С повышением добротности полоса пропускания фильтра сужается, а максимальное усиление остается неизменным.

Реализовать ПФ можно при использовании в качестве четырехполосников А и В звеньев 4 и 6 из табл. 28.1. Схема такого ПФ приведена на рис. 28.6, б. В соответствии с данными табл. 28.1 можно получить следующие значения характеристик ПФ:

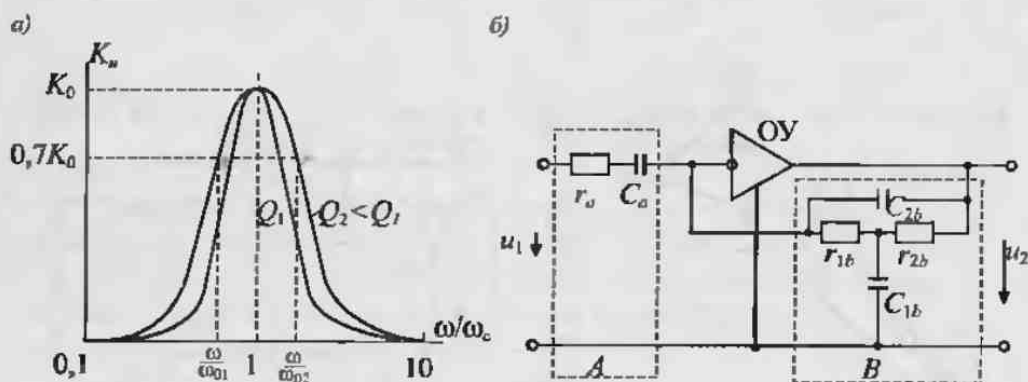


Рис. 28.6. Амплитудно-частотная характеристика полосового фильтра (а) и его схема (б)

- максимальное усиление в полосе пропускания

$$K_0 = \frac{C_{1b}}{C_{2b}} \frac{g_a}{g_{1b} + g_{2b}};$$

- частота максимального усиления (квазирезонансная частота)

$$\omega_0 = (r_{1b} r_{2b} C_{1b} C_{2b})^{-1/2};$$

- добротность фильтра

$$Q = d^{-1} = \left[\frac{C_{1b} (r_{1b} + r_{2b})^2}{C_{2b} r_{1b} r_{2b}} \right]^{-1/2}.$$

Аналогичные результаты можно получить, если использовать в качестве четырехполюсников *A* и *B* звенья 4 и 9 табл. 28.1. Схема ПФ с такими звеньями приведена на рис. 28.7.

Заграждающий фильтр с одноконтурной обратной связью (ЗФ) имеет частотную характеристику, противоположную частотной характеристике полосового фильтра. ЗФ ослабляет сигналы в полосе частот $\omega_{01} < \omega < \omega_{02}$ и пропускает на выход сигналы, частота которых лежит за пределами этой полосы частот. Передаточную функцию ЗФ можно получить, используя передаточную функцию ПФ:

$$K_{зф} = K_0 - K_{уф} = K_0 - \frac{K_0 d \omega s}{s^2 + d\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{K_0 (s^2 + \omega_0^2)}{s^2 + d\omega_0 s + \omega_0^2}, \quad (28.15)$$

где K_0 — коэффициент передачи ЗФ на постоянном напряжении.

Комплексная амплитудно-частотная характеристика ЗФ в соответствии с выражением (28.15) имеет вид

$$K_{зф} = \frac{K_0 (\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2) - jd\omega_0 \omega}. \quad (28.16)$$

откуда получаем значение ее модуля

$$K_u = |K_{зф}| = \frac{K_0 (\omega^2 - \omega_0^2)}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - (d\omega_0 \omega)^2}}, \quad (28.17)$$

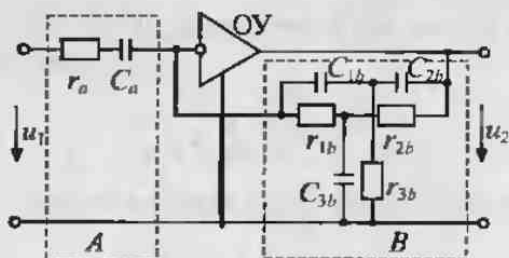


Рис. 28.7. Полосовой фильтр с двойным T-образным мостом в цепи обратной связи

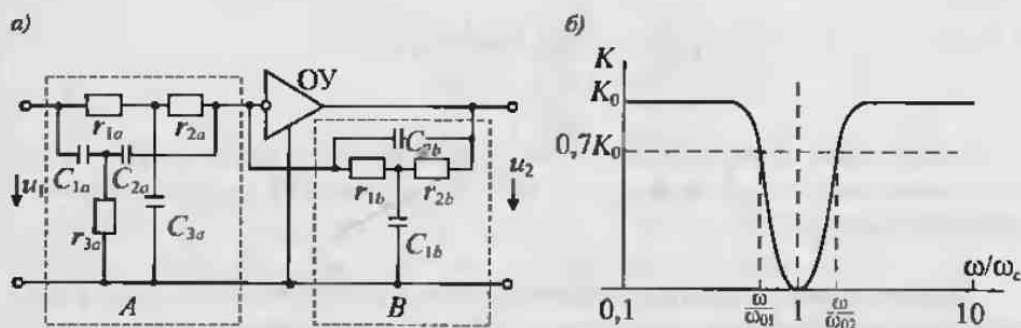


Рис. 28.8. Заграждающий фильтр с одноконтурной обратной связью (а) и его амплитудно-частотная характеристика (б)

Амплитудно-частотная характеристика ЗФ изображена на рис. 28.8, а. На частоте $\omega = \omega_0$ имеет $K_u = 0$, а на постоянном напряжении ($\omega = 0$) получаем $K_u = K_0$. С повышением частоты K_{ω} также стремится к значению $K_u = K_0$.

Реализовать ЗФ с такой характеристикой можно при использовании в качестве четырехполюсников А и В звеньев 9 и 6 из табл. 28.1. Схема ЗФ с этими звеньями приведена на рис. 28.8, б. Для этой схемы можно получить уравнение вида (28.16), если положить, что $d_{1a} = d_{2a} = d_{2b} = d$, т. е. выполнить условия

$$\frac{g_{1a} + g_{2a}}{C_{3a}} = \frac{g_{3a}}{C_{1a} + C_{2a}} = \frac{g_{1b} + g_{2b}}{C_{1b}}; \quad C_{1a} + C_{2a} = C_{3a}; \quad g_{1a} + g_{2a} = g_{3a}.$$

При этом получим, что

$$K_0 = \frac{r_{1b} + r_{2b}}{r_{1a} + r_{2a}}; \quad \omega_0 = (r_{1b} r_{2b} C_{1b} C_{2b})^{-1/2},$$

т. е. характеристики K_0 и ω_0 такие же, как у ФНЧ второго порядка.

Активные фильтры с многоконтурной обратной связью. Фильтры второго порядка также реализуются в схемах с многоконтурной обратной связью. Такая обратная связь может быть выполнена с помощью пассивного многополюсника, схема которого приведена на рис. 28.9, а.

Пассивный многополюсник имеет два входа и один выход. На вход 1 поступает входной сигнал \dot{U}_1 . На второй вход 3 подводится напряжение обратной связи \dot{U}_3 . Выходное напряжение \dot{U}_2 снимается с вывода 2 и поступает на инвертирующий вход операционного усилителя ОУ.

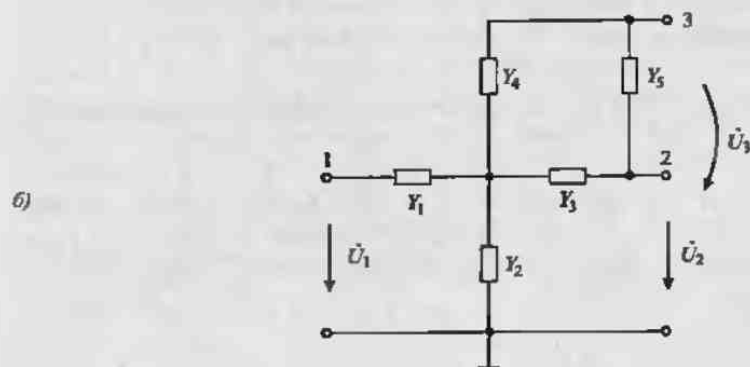
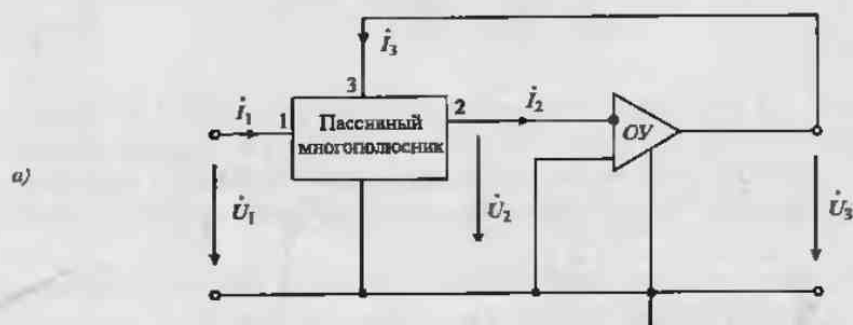


Рис. 28.9. Схема фильтра с пассивным многополюсником (а) и схема многополюсника (б)

Для такой схемы можно записать систему уравнений узловых напряжений, которые имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 Y_{11} - \dot{U}_2 Y_{12} - \dot{U}_3 Y_{13} = \dot{I}_1, \\ -\dot{U}_1 Y_{21} + \dot{U}_2 Y_{22} - \dot{U}_3 Y_{23} = \dot{I}_2, \\ -\dot{U}_1 Y_{31} + \dot{U}_2 Y_{32} - \dot{U}_3 Y_{33} = \dot{I}_3. \end{cases} \quad (28.18)$$

Эта система уравнений упрощается с учетом особенностей идеального ОУ. Поскольку входная цепь ОУ удовлетворяет условиям $\dot{U}_2 = 0$ и $\dot{I}_2 = 0$, то при $K_{\mu} \rightarrow \infty$ находим из второго уравнения системы (28.18)

$$-\dot{U}_1 Y_{21} - \dot{U}_3 Y_{23} = 0,$$

откуда получаем значение коэффициента передачи

$$K_{\mu} = \frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_1} = -\frac{Y_{21}}{Y_{23}}. \quad (28.19)$$

Из уравнения (28.19) следует, что коэффициент передачи фильтра определяется только свойствами пассивного многополюсника. В связи с этим создание фильтров с заданными частотными характеристиками сводится к созданию таких многополюсников, которые обеспечивают требуемые характеристики фильтров.

В качестве примера рассмотрим активный фильтр с многополюсником, выполненным по схеме, приведенной на рис. 28.9, б.

Пример 28.1. Рассчитать и построить графики амплитудно-частотной характеристики коэффициента передачи по напряжению активного фильтра на операционном усилителе с многоконтурной обратной связью (рис. 28.10, а) при использовании идеального операционного усилителя с коэффициентом передачи по напряжению $A_0 \rightarrow \infty$. Расчет выполнить для трех вариантов значений элементов, приведенных на схеме рис. 28.10, а, соответствующих фильтру нижних частот с $Y_1 = g_1$, $Y_2 = sC_2$, $Y_3 = g_3$, $Y_4 = g_4$, $Y_5 = sC_5$, где $s = j\omega$; фильтру верхних частот с $Y_1 = sC_1$, $Y_2 = g_2$, $Y_3 = sC_3$, $Y_4 = sC_4$, $Y_5 = g_5$, полосовому фильтру с $Y_1 = g_1$, $Y_2 = g_2$, $Y_3 = sC_3$, $Y_4 = sC_4$, $Y_5 = g_5$, схемы которых приведены на рис. 28.11, а, 28.12, а и 28.14, а

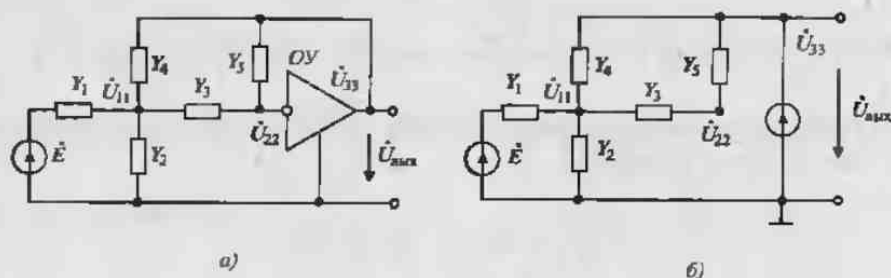


Рис. 28.10. Активный фильтр с многоконтурной обратной связью (а) и его схема замещения (б)

Решение. Составим эквивалентную схему фильтра, изображенную на рис. 28.10, б, полагая, что воздействие на входе задано обобщенным комплексным напряжением $E(s) = E$, где $s = j\omega$. Расчет эквивалентной схемы выполним методом узловых напряжений. Схема содержит три независимых узла, напряжения которых имеют значения \dot{U}_{11} , \dot{U}_{22} и \dot{U}_{33} . Учитывая, что напряжения $\dot{U}_{33} = -\dot{U}_{22}A_0$, составим систему узловых уравнений для узлов 1 и 2:

$$\begin{cases} \dot{U}_{11}Y_{11} - \dot{U}_{22}Y_{12} - \dot{U}_{33}Y_{13} = \dot{J}_{11}, \\ -\dot{U}_{11}Y_{21} + \dot{U}_{22}Y_{22} - \dot{U}_{33}Y_{23} = \dot{J}_{22}. \end{cases}$$

где $Y_{11} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$; $Y_{12} = Y_{21} = Y_5$; $Y_{22} = Y_3 + Y_5$; $Y_{13} = Y_4$; $Y_{23} = Y_4$; $\dot{J}_{11} = \dot{E}Y_1$; $\dot{J}_{22} = 0$.

Подставив в систему уравнений значения узловых проводимостей и задающих токов, найдем

$$\begin{cases} \dot{U}_{11}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) - \dot{U}_{22}(Y_5 - A_0Y_4) = \dot{E}Y_1, \\ -\dot{U}_{11}Y_5 + \dot{U}_{22}(Y_3 + Y_5 + A_0Y_4) = 0. \end{cases}$$

Решая систему узловых напряжений относительно \dot{U}_{22} , получим

$$\dot{U}_{22} = \frac{\dot{E}Y_1Y_5}{(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)(Y_3 + Y_5 + A_0Y_4) - Y_5^2 + A_0Y_4Y_4}.$$

Коэффициент передачи фильтра по напряжению $\dot{K}_n = \dot{U}_{33} / \dot{E} = -A_0\dot{U}_{22} / \dot{E}$ имеет значение

$$\dot{K}_n = \frac{-A_0Y_1Y_5}{A_0[(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)Y_4 + Y_5Y_4] + (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)(Y_3 + Y_5)Y_4^2}.$$

При использовании в фильтре идеального операционного усилителя с $A_0 \rightarrow \infty$ окончательно получим

$$\dot{K}_n = \frac{-Y_1Y_5}{(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)Y_5 + Y_5Y_4}. \quad (28.20)$$

Коэффициент передачи фильтра нижних частот найдем, подставляя в выражение для \dot{K}_n значения параметров элементов (рис. 28.11, а):

$$\dot{K}_{n0} = \frac{-g_1g_3}{g^2C_2C_3 + sC_3(g_1 + g_3 + g_4) + g_3g_4} = \frac{-H\omega_0^2}{s^2 + sd\omega_0 + \omega_0^2},$$

где

$$H = g_1/g_4; \quad d = \frac{g_1 + g_3 + g_4}{C_2} \sqrt{\frac{C_2C_3}{g_3g_4}}; \quad \omega_0^2 = \frac{g_1g_4}{C_2C_3}.$$

Вводя значение относительной частоты $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$, получим

$$K_{\text{ин}} = \frac{-H}{-\bar{\omega}^2 + j\bar{\omega}d + 1}$$

Амплитудно-частотная характеристика фильтра нижних частот определяется выражением

$$K_{\text{ин}} = \frac{-H}{\sqrt{(1-\bar{\omega}^2)^2 + d^2\bar{\omega}^2}} \quad (28.21)$$

График амплитудно-частотной характеристики фильтра нижних частот можно построить, если учесть, что при $\bar{\omega} = 0$ $K_{\text{ин}} = -H$, при $\bar{\omega} < 1$ $K_{\text{ин}} = -H$, при $\bar{\omega} = 1$ $K_{\text{ин}} = -H/d$, а при $\bar{\omega} > 1$ $K_{\text{ин}} = -H/\bar{\omega}^2$. Амплитудно-частотная характеристика фильтра нижних частот изображена на рис. 28.11, б. Очевидно, что фильтр нижних частот пропускает почти без ослабления все сигналы, частота которых $\omega < \omega_0$, ослабляет в d раз сигналы с частотой $\omega = \omega_0$ и почти полностью не пропускает сигналы с частотой $\omega > \omega_0$.

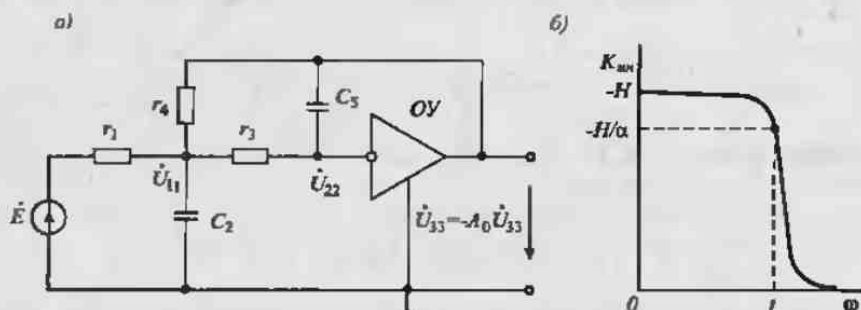


Рис. 28.11. Схема фильтра нижних частот (а) и его частотная характеристика (б)

Коэффициент передачи фильтра верхних частот получим, подставив в выражение для K_v соответствующие значения параметров элементов (рис.28.12, а):

$$K_{\text{ин}} = \frac{-s^2 C_1 C_3}{s^2 C_3 C_4 + s(C_1 + C_3 + C_4)g_3 + g_2 g_3} = \frac{-H\omega_0^2}{s^2 + d\omega_0 s + \omega_0^2}$$

где

$$H = C_1 / C_4; d = (C_1 + C_3 + C_4) \sqrt{\frac{g_3}{g_2 C_3 C_4}}; \omega_0^2 = \frac{g_2 g_3}{C_3 C_4}$$

Используя значение относительной частоты $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$, получим

$$\dot{K}_{\text{ин}} = \frac{H\bar{\omega}^2}{-\bar{\omega}^2 + j\bar{\omega}d + 1}$$

Амплитудно-частотная характеристика фильтра верхних частот определяется выражением

$$K_{\text{ин}} = \frac{H\bar{\omega}^2}{\sqrt{(1-\bar{\omega}^2)^2 + d^2\bar{\omega}^2}} \quad (28.22)$$

График амплитудно-частотной характеристики фильтра верхних частот можно построить, если учесть, что при $\bar{\omega} = 0$ $K_{\text{ин}} = 0$, при $\bar{\omega} < 1$ $K_{\text{ин}} \approx -H\bar{\omega}^2$, при $\bar{\omega} = 1$ $K_{\text{ин}} = H/d$, а при $\bar{\omega} > 1$ $K_{\text{ин}} \approx H$. Амплитудно-частотная характеристика фильтра верхних частот изображена на рис. 28.12, б. Очевидно, что фильтр верхних частот почти не пропускает сигналы с частотой $\omega < \omega_0$, ослабляет в d раз сигналы с частотой $\omega = \omega_0$ и пропускает все сигналы, частота которых $\omega > \omega_0$.

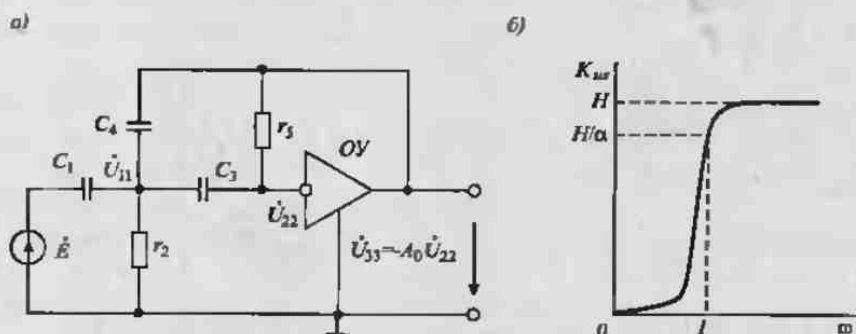


Рис. 28.12. Схема фильтра верхних частот (а) и его частотная характеристика (б)

Коэффициент передачи полосового фильтра получим после подстановки в (28.20) значений параметров элементов (рис. 28.13, а):

$$\dot{K}_{\text{ин}} = \frac{-sC_3g}{s^2C_3C_4 + s(C_3 + C_4)g_3 + (g_1 + g_2)g_3} = \frac{-H\omega_0 s}{s^2 + d\omega_0 s + \omega_0^2},$$

где

$$H = \frac{g_1}{C_4\omega_0}; d = \frac{(C_3 + C_4)g_3}{C_3C_4\omega_0}; \omega_0^2 = \frac{(g_1 + g_2)g_3}{C_3C_4}$$

Используя значение относительной частоты $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$, получим

$$K_{un} = \frac{-Hj\bar{\omega}}{-\bar{\omega}^2 + jd\bar{\omega} + 1}$$

Амплитудно-частотная характеристика полосового фильтра определяется выражением

$$K_{un} = \frac{-H\bar{\omega}}{\sqrt{(1-\bar{\omega}^2)^2 + d^2\bar{\omega}^2}} \quad (28.23)$$

График амплитудно-частотной характеристики полосового фильтра можно построить, если учесть, что при $\bar{\omega} = 0$ $K_{un} = 0$, при $\bar{\omega} < 1$ $K_{un} \approx -H\bar{\omega}$, при $\bar{\omega} = 1$ $K_{un} = H/d$, а при $\bar{\omega} > 1$ $K_{un} = H/\bar{\omega}$. Амплитудно-частотная характеристика полосового фильтра приведена на рис. 28.13, б. Очевидно, что полосовой фильтр почти не пропускает сигналы, частота которых $\omega < \omega_0$ или $\omega > \omega_0$, и пропускает с ослаблением в d раз сигналы с частотой $\omega = \omega_0$.

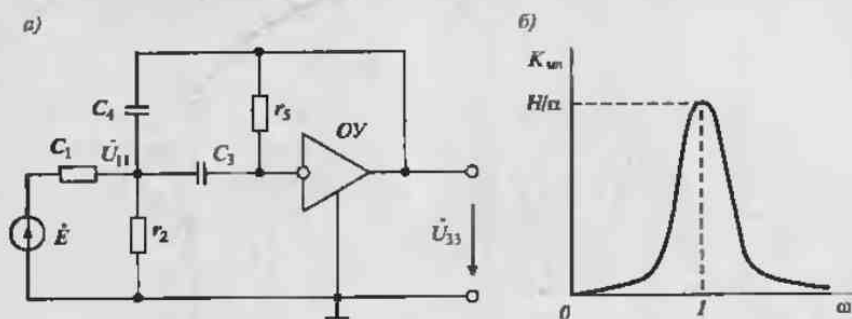


Рис. 28.13 Схемы полосового фильтра (а) и его частотная характеристика (б)

ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Лекция 29. Линии передачи с потерями в стационарном режиме

Устройство и назначения линий передачи. Передача сигналов от генератора к нагрузке выполняется при помощи системы проводников, которые обычно называют линиями передач. Устройство линий передач может быть различным и зависит от их назначения, области применения, диапазона частот и других факторов. По конструкции линии передачи разделяют на следующие группы: двухпроводные, коаксиальные, полосковые, многопроводные.

Линия передачи называется *длинной*, если ее длина соизмерима с длиной волны, которая по ней распространяется. Основным назначением линии передачи является передача электромагнитной энергии от одного устройства к другому. Однако, кроме этого длинные линии находят применение в качестве резонансных колебательных систем, излучающих устройств, трансформаторов сопротивлений и некоторых других устройств. Особенностью линии передачи является невозможность разграничения в ней элементов, содержащих магнитную, электрическую или тепловую энергию.

Первичные параметры линии. Схематическое изображение линии передачи приведено на рис. 29.1, а. На этом рисунке линия передачи представлена в виде двух проводов, к которым с одной стороны подключен источник напряжения u_1 , а с другой — нагрузка z_2 . Общая длина линии равна l , а отсчет координаты рассматриваемого сечения линии ведется или от источника напряжения (расстояние x) или от нагрузки (расстояние y), при этом выполняется условие $y = l - x$.

Каждый бесконечно малый участок длиной линии несет в себе все перечисленные выше виды энергии и может быть замещен эквивалентной Г-образной схемой, приведенной на рис. 29.1, б. В последовательном плече этой схемы включены элементарные бесконечно малые сопротивление dR и индуктивность dL . Аналогично, в параллельном плече включены элементарная проводимость dG и емкость dC .

Отношение этих величин к элементу длины линии $dx = -dy$ называют погонными параметрами линии. Если линия однородна по всей длине, то ее погонные параметры постоянны и определяются по формулам:

$$R_0 = \frac{dR}{dx}; L_0 = \frac{dL}{dx}; G_0 = \frac{dG}{dx}; C_0 = \frac{dC}{dx}. \quad (29.1)$$

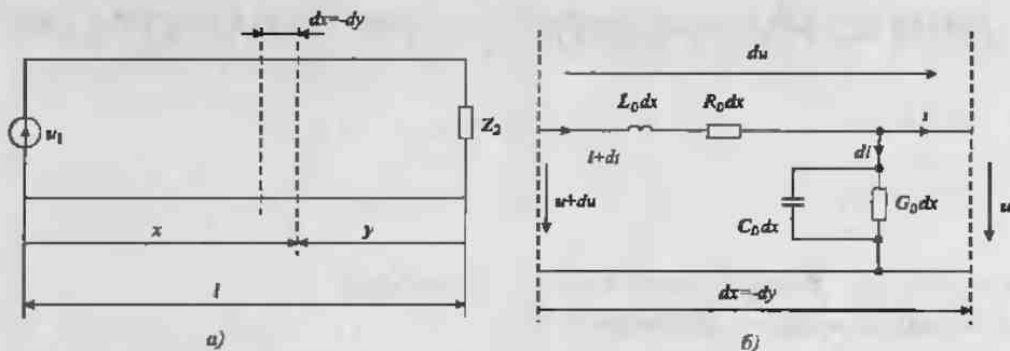


Рис. 29.1. Линия передачи (а) и схема замещения ее участка длиной dx (б)

Эти погонные параметры, представляющие собой значения сопротивления, индуктивности, проводимости и емкости, приходящиеся на единицу длины линии, называются первичными параметрами линии.

Погонное сопротивление линии R_0 учитывает потери в двух проводках линии передачи. Это сопротивление растет с ростом частоты, что обусловлено поверхностным эффектом. Аналогично, погонная индуктивность L_0 учитывает результирующую индуктивность двух проводников на единицу длины линии. С увеличением диаметра проводников индуктивность уменьшается.

Погонная емкость линии C_0 характеризует емкость между ее проводниками на единицу длины. Эта емкость растет с увеличением диаметра проводников и уменьшением расстояния между ними. Она также зависит от диэлектрической проницаемости изоляции между проводниками. Погонная проводимость G_0 учитывает потери в изоляции между проводниками линии. С ростом частоты погонная проводимость увеличивается, так как растут потери в изоляции. В воздушных линиях передачи погонную проводимость не учитывают ввиду ее малости. Значения погонных параметров для двух типов воздушных линий (двухпроводной и коаксиальной) из медных проводников приведены в табл. 29.1.

Таблица 29.1

Погонные параметры воздушных линий передачи

Тип линии	R_0 , мкОм/м	G_0 , мкСм/м	L_0 , мкГн/м	C_0 , пФ/м
Двухпроводная	$16,64 \sqrt{f/d}$	$G_0 + kf$	$0,4 \ln(2a/d)$	$28/\ln(2a/d)$
Коаксиальная	$8,32(d_1+d_2)\sqrt{f/d_1d_2}$	$G_0 + \omega C_0 \operatorname{tg} \delta$	$0,2 \ln(d_2/d_1)$	$55 \ln(d_2/d_1)$

где: f — частота тока в Гц, d — диаметр проводника в см, G_0 — проводимость изоляции на постоянном токе в См/м, δ — угол диэлектрических потерь, a — расстояние между проводниками в см.

Дифференциальные уравнения линии передачи. Уравнения линии могут быть получены из рассмотрения модели, приведенной на рис. 29.1. При рассмотрении процессов, происходящих в линии, будем считать, что напряжение и ток в линии являются функциями двух переменных — времени t и пространственной координаты x (или y).

Используя погонные параметры линии передачи (29.1), получим

$$dR = R_0 dx, \quad dL = L_0 dx, \quad dG = G_0 dx, \quad dC = C_0 dx.$$

Уравнения линии, определяющие приращения напряжения и тока на участке линии длиной dx , можно записать в виде

$$\left\{ \begin{aligned} du &= \left(R_0 i + L_0 \frac{di}{dt} \right) dx, \\ di &= \left(G_0 u + C_0 \frac{du}{dt} \right) dx, \end{aligned} \right. \quad (29.2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} du &= \left(R_0 i + L_0 \frac{di}{dt} \right) dx, \\ di &= \left(G_0 u + C_0 \frac{du}{dt} \right) dx, \end{aligned} \right. \quad (29.2a)$$

в которых используются частные производные du/dt и di/dt , так как ток $i(x, t)$ и напряжение $u(x, t)$ являются функциями двух переменных x и t .

Учитывая, что $du = (\partial u/\partial x)dx$ и $di = (\partial i/\partial x)dx$ из (29.2) получаем

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ \frac{di}{dx} &= G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \right. \quad (29.3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ \frac{di}{dx} &= G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \right. \quad (29.3a)$$

В уравнениях линии (29.3) можно разделить переменные. Для этого следует уравнение (29.3) продифференцировать по t , а уравнение (29.3a) — по x , тогда получим

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} &= R_0 \frac{\partial i}{\partial t} + L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= G_0 \frac{\partial u}{\partial x} + C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}. \end{aligned} \right. \quad (29.4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} &= R_0 \frac{\partial i}{\partial t} + L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= G_0 \frac{\partial u}{\partial x} + C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}. \end{aligned} \right. \quad (29.4a)$$

Произведя подстановку уравнения (29.4) в уравнение (29.4a), получим дифференциальное уравнение для тока в линии:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (L_0 G_0 + C_0 R_0) \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 G_0 i. \quad (29.5)$$

Аналогично можно получить дифференциальное уравнение для напряжения в линии:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (L_0 C_0 + C_0 L_0) \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (29.5a)$$

Уравнения (29.5) и (29.5a) называют *телеграфными уравнениями* и их сравнение показывает, что решения для тока и напряжения следует искать в одной и той же форме. В общем случае эти уравнения можно решить только при известных граничных условиях, в качестве которых обычно используют напряжения и токи в конце или начале линии. Полные интегралы этих уравнений позволяют определить токи и напряжения в линии как в стационарном, так и в переходном режимах.

Уравнения линии в стационарном режиме при гармоническом сигнале. При гармоническом напряжении $\dot{u} = Ue^{j\omega t}$ и токе $\dot{i} = Ie^{j\omega t}$, выполнив дифференцирование по времени и подставив полученные значения в уравнения (29.5) и (29.5a), получим для комплексных значений напряжения и тока дифференциальные уравнения в полных производных

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \dot{U} [(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)] = \dot{U} Z_0 Y_0, \quad (29.6)$$

$$\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = \dot{I} [(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)] = \dot{I} Z_0 Y_0. \quad (29.6a)$$

где $Z_0 = R_0 + j\omega L_0$ и $Y_0 = G_0 + j\omega C_0$ — погонные комплексные сопротивление и проводимость линии, соответственно.

Характеристическое уравнение для дифференциальных уравнений (29.6) и (29.6a) имеет одинаковый вид

$$\gamma^2 - Z_0 Y_0 = 0, \quad (29.7)$$

а его решение дает два корня $\gamma_{1,2} = \pm \sqrt{Z_0 Y_0} = \pm \gamma$ где $\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0}$ — коэффициент распространения волны в линии.

Решение уравнения (29.6) ищется в виде:

$$\dot{U} = Ae^{-\gamma x} + Be^{-\gamma x}, \quad (29.8)$$

где A и B — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий. Аналогичное решение имеет уравнение (29.6а)

$$\dot{I} = Ce^{-\gamma x} + De^{-\gamma x}, \quad (29.8a)$$

где C и D — постоянные интегрирования, также определяемые из граничных условий.

Поскольку из уравнения (29.3) следует, что

$$\frac{d\dot{U}}{dx} = Z_0 \dot{I},$$

то, выполняя дифференцирование уравнения (29.8), найдем постоянные интегрирования $C = A\gamma/Z_0$, $D = -B\gamma/Z_0$, поэтому уравнение (29.8а) можно записать в виде

$$\dot{I} = \frac{A}{Z_c} e^{-\gamma x} - \frac{B}{Z_c} e^{-\gamma x}, \quad (29.9)$$

где $Z_c = Z_0 / \gamma = \sqrt{Z_0 / Y_0}$ — характеристическое (волновое) сопротивление линии передачи.

Из уравнений (29.8) и (29.9) следует, что напряжение \dot{U} и ток \dot{I} состоят из двух составляющих. Первые составляющие в этих уравнениях характеризуют падающие волны напряжения и тока, которые перемещаются от источника к нагрузке, вторые — отраженные волны, которые перемещаются в обратном направлении. В связи с этим уравнения (29.8) и (29.9) можно представить в виде суммы падающих и отраженных волн напряжения и тока

$$\dot{U} = \dot{U}_n + \dot{U}_o, \quad (29.10)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_n - \dot{I}_o, \quad (29.10a)$$

где $\dot{U}_n = Ae^{-\gamma x}$ — напряжение падающей волны;
 $\dot{U}_o = Be^{-\gamma x}$ — напряжение отраженной волны;
 $\dot{I}_n = Ae^{-\gamma x} / Z_c$ — ток падающей волны;
 $\dot{I}_o = Be^{-\gamma x} / Z_c$ — ток отраженной волны.

Напряжения и токи падающих и отраженных волн связаны законом Ома

$$\frac{\dot{U}_n}{\dot{I}_n} = \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0} = Z_c \quad (29.11)$$

В зависимости от заданных граничных условий значения постоянных интегрирования А и В могут выражаться различным образом:

- через напряжение U_1 и ток I_1 в начале линии (т. е. при $x = 0$),
- через напряжение U_2 и ток I_2 в конце линии (т. е. при $y = 0$),
- через напряжение U_1 и сопротивление нагрузки $Z_n = \dot{U}_1 / \dot{I}_2$ и т. д.

Кроме этого, уравнения линии можно представить в гиперболических функциях, используя известные соотношения

$$\operatorname{sh} \gamma x = (e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) / 2; \operatorname{ch} \gamma x = (e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) / 2.$$

Различные формы записи уравнений линии приведены в табл. 29.2. В этих уравнениях учтено введенное ранее условие $y = l - x$ и использовано соотношение $Z_2 = \dot{U}_1 / \dot{I}_2$.

Таблица 29.2

Уравнения линии передачи

Граничные условия	В показательных функциях	В гиперболических функциях
\dot{U}_1, \dot{I}_1	$\dot{U} = \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_c}{2} e^{-\gamma x} + \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_c}{2} e^{\gamma x}$ $\dot{I} = \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_c}{2 Z_c} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_c}{2 Z_c} e^{\gamma x}$	$\dot{U} = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \dot{I}_1 Z_c \operatorname{sh} \gamma x$ $\dot{I} = \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x$
\dot{U}_2, \dot{I}_2	$\dot{U} = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_c}{2} e^{\gamma y} + \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_c}{2} e^{-\gamma y}$ $\dot{I} = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_c}{2 Z_c} e^{\gamma y} + \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_c}{2 Z_c} e^{-\gamma y}$	$U = U_2 \operatorname{ch} \gamma y - \dot{I}_2 Z_c \operatorname{sh} \gamma y$ $i = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma y + \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma y$
\dot{U}_1, Z_2	$\dot{U} = \dot{U}_1 \frac{(Z_2 + Z_c) e^{\gamma y} + (Z_2 - Z_c) e^{-\gamma y}}{(Z_2 + Z_c) e^{\gamma y} + (Z_2 - Z_c) e^{-\gamma y}}$ $\dot{I} = \frac{\dot{U}_1}{Z_c} \frac{(Z_2 + Z_c) e^{\gamma y} - (Z_2 - Z_c) e^{-\gamma y}}{(Z_2 + Z_c) e^{\gamma y} + (Z_2 - Z_c) e^{-\gamma y}}$	$\dot{U} = \dot{U}_1 \frac{Z_2 \operatorname{ch} \gamma y + Z_c \operatorname{sh} \gamma y}{Z_2 \operatorname{ch} \gamma y + Z_c \operatorname{sh} \gamma y}$ $\dot{I} = \frac{\dot{U}_1}{Z_c} \frac{Z_2 \operatorname{ch} \gamma y + Z_c \operatorname{sh} \gamma y}{Z_2 \operatorname{ch} \gamma y + Z_c \operatorname{sh} \gamma y}$

Вторичные параметры линии. Вторичными параметрами линии являются ее волновое сопротивление и коэффициент распространения волн тока и напряжения.

Волновое сопротивление Z_c можно рассматривать как входное сопротивление бесконечно длинной однородной линии и определять через первичные параметры по формуле

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}. \quad (29.12)$$

В общем случае волновое сопротивление линии является комплексным и может быть представлено в виде

$$Z_c = z_c e^{j\varphi} = r_c + jx_c, \quad (29.13)$$

где $z_c = \sqrt{r_c^2 + x_c^2}$ — модуль волнового сопротивления;

$\varphi = \arctg(x_c/r_c)$ — аргумент волнового сопротивления;

r_c и x_c — соответственно активная и реактивная составляющие волнового сопротивления.

На постоянном токе ($\omega = 0$) и очень высокой частоте ($\omega \rightarrow \infty$) волновое сопротивление вещественное

$$z_{c0} = \sqrt{R_0/G_0}, z_c = \sqrt{L_0/C_0}. \quad (29.14)$$

Если потери в линии малы ($R_0 \ll \omega L_0$, $G_0 \ll \omega C_0$), то волновое сопротивление имеет емкостной характер:

$$r_c = \sqrt{L_0/C_0}, x_c = \sqrt{L_0/C_0} [R_0/(2\omega L_0) + G_0/(2\omega C_0)]. \quad (29.15)$$

Для кабельных линий при выполнении условий $G_0 \approx \omega L_0 = 0$ активная и реактивная составляющие волнового сопротивления оказываются одинаковыми

$$r_c = -x_c = \sqrt{R_0/(2\omega C_0)}. \quad (29.16)$$

Процесс распространения вдоль линии волн напряжения или тока характеризуется коэффициентом распространения

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}. \quad (29.17)$$

В общем случае коэффициент распространения представляет собой комплексную величину $\gamma = \alpha + j\beta$, в которой вещественная часть α характеризует затухание амплитуды волн на единичном отрезке длины линии, а мнимая часть β характеризует изменение фазы волны на том же отрезке линии.

Коэффициент затухания измеряется в неперках или белах на метр, а коэффициент фазы — в радианах или градусах на метр. Произведение коэффициента затухания на длину отрезка линии определяет затухание волны в данном отрезке.

$$\alpha l = \ln \frac{U_1}{U_2} \text{ Нп или } \alpha l = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} \text{ Б,}$$

где U_1 и U_2 — напряжения в начале и конце отрезка линии.

Так как непер и бел являются сравнительно крупными единицами, то на практике большое распространение получила единица затухания, называемая децибелом (дБ) и определяемая как 0,1 Б, причем

$$\alpha l = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} \text{ дБ.} \quad (29.18)$$

Затухание волн тока определяется аналогично затуханию волн напряжения:

$$\alpha l = \ln \frac{I_1}{I_2} \text{ Нп} = 20 \lg \frac{I_1}{I_2} \text{ дБ,}$$

где I_1 и I_2 — токи соответственно в начале и конце линии.

В ряде случаев затухание определяют через мощности P_1 в начале отрезка линии и P_2 в конце отрезка линии. При этом расчет затухания производится по формуле

$$\alpha l = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2} \text{ Нп} = 10 \lg \frac{P_1}{P_2} \text{ дБ.}$$

При переходе от одних единиц измерения затухания к другим можно пользоваться соотношением $1 \text{ Нп} = 0,8686 \text{ дБ}$.

При расчете коэффициентов затухания и фазы по первичным параметрам линии можно пользоваться выражениями

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)} + (R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0) \right]}; \quad (29.19)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)} - (R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0) \right]}. \quad (29.19a)$$

Если потери в линии достаточно малы, то расчет коэффициентов затухания и фазы можно производить по упрощенным формулам

$$\alpha \approx \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{G_0}{2} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}},$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{L_0 C_0} \text{ при } R_0 \ll \omega L_0 \text{ и } G_0 \ll \omega C_0.$$

Для линии без потерь ($R_0 = G_0 = 0$) справедливы соотношения

$$\alpha = 0; \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (29.20)$$

Если линия работает на постоянном токе ($\omega = 0$), то $\beta = 0$, а $\alpha = \sqrt{R_0 G_0}$. Для кабельной линии обычно выполняется условие $G_0 \approx L_0 \approx 0$. При этом расчет коэффициентов затухания и фазы производится по формуле

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega R_0 C_0}{2}}.$$

Коэффициент отражения. Коэффициентом отражения волны в линии называется отношение комплекса отраженной волны к комплексу падающей волны напряжения или тока

$$\dot{\Gamma} = \frac{\dot{U}_0}{\dot{U}_n} = \frac{\dot{I}_0}{\dot{I}_n} = \frac{A_2}{A_1} e^{2\gamma x}. \quad (29.21)$$

Отражение в неоднородных линиях возникает в месте нарушения однородности (например, в месте соединения двух линий с различными волновыми сопротивлениями). В однородных линиях отражение возникает в местах подключения генератора или нагрузки. Отражение от генератора характеризуется коэффициентом отражения от начала линии ($x = 0$):

$$\dot{\Gamma}_1 = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_c}{\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_c} = \frac{Z_1 - Z_c}{Z_1 + Z_c}, \quad (29.22)$$

где $Z_1 = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$ — входное сопротивление линии.

Отражение от нагрузки характеризуется коэффициентом отражения от конца линии:

$$\dot{\Gamma}_2 = \frac{A_2}{A_1} e^{2\gamma l} = \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_c}{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_c} = \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 + Z_c}, \quad (29.23)$$

где $Z_2 = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$ — сопротивление нагрузки.

Для линии, согласованной с нагрузкой и генератором ($Z_1 = Z_2 = Z_c$) коэффициенты отражения $\dot{\Gamma}_1 = \dot{\Gamma}_2 = 0$. Если линия замкнута или разомкнута на конце ($Z_2 = 0$ или $Z_2 = \infty$), то в ней возникает полное внутреннее отражение и $|\dot{\Gamma}| = 1$.

Входное сопротивление. Входное сопротивление линии равно отношению напряжения к току на входе линии

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}. \quad (29.24)$$

Входное сопротивление позволяет заменить рассмотрение цепей с распределенными параметрами цепями с сосредоточенными параметрами. При анализе линий с потерями входное сопротивление можно определить по формуле

$$Z_{\text{вх}} = Z_c \frac{\dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z_c \operatorname{sh} \gamma l}{\dot{U}_2 \operatorname{sh} \gamma l + \dot{I}_2 Z_c \operatorname{ch} \gamma l} = Z_c \frac{Z_2 + Z_c \operatorname{th} \gamma l}{Z_c + Z_2 \operatorname{th} \gamma l}. \quad (29.25)$$

Если линия согласована с нагрузкой ($Z_2 = Z_c$), то $Z_{\text{вх}} = Z_c$. Для линии, замкнутой на конце ($Z_2 = 0$)

$$Z_{\text{вх}0} = Z_c \operatorname{th} \gamma l. \quad (29.26)$$

Для линии, разомкнутой на конце ($Z_2 = \infty$),

$$Z_{\text{вх}\infty} = Z_c \operatorname{cth} \gamma l. \quad (29.26a)$$

Входное сопротивление линии можно определять по режимам холостого хода и короткого замыкания:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_2 + Z_{\text{вх}0}}{Z_2 + Z_{\text{вх}\infty}} Z_{\text{вх}\infty}. \quad (29.27)$$

Включение нагрузки в линию можно рассматривать как изменение ее длины. При этом входное сопротивление определяется выражением

$$Z_{\text{вх}} = Z_c \operatorname{th} \gamma(l + \Delta l), \quad (29.28)$$

где $\Delta l = \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{Z_c + Z_2}{Z_c - Z_2}$ — эффективное удлинение линии.

Эффективное удлинение $\Delta l \rightarrow \infty$ для линии, согласованной с нагрузкой ($Z_2 = Z_c$). Для закороченной на конце линии $\Delta l = 0$.

Значения входного сопротивления линии в режимах короткого замыкания и холостого хода позволяют определить вторичные параметры:

$$Z_c = \sqrt{Z_{\text{вх}0} Z_{\text{вх}\infty}}; \quad (29.29)$$

$$\operatorname{th} \gamma l = \sqrt{\frac{Z_{\text{вх}0}}{Z_{\text{вх}\infty}}}; \quad (29.30)$$

$$\gamma = \frac{1}{2l} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{Z_{\text{вх}0}}{Z_{\text{вх}\infty}}}}{1 - \sqrt{\frac{Z_{\text{вх}0}}{Z_{\text{вх}\infty}}}}. \quad (29.31)$$

Фазовая скорость волны в линии. Волны напряжения и тока распространяются в линии с конечной скоростью. Фазовая скорость волны определяется скоростью, с которой распространяется вдоль линии любое значение бегущей волны тока или напряжения с фиксированной фазой:

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (29.32)$$

Кроме фазовой скорости, волна в линии характеризуется еще своей длиной λ , представляющей кратчайшее расстояние между двумя точками линии, в которых фаза колебания волны в любой момент одинакова. Это означает, что фазовые углы в точках x и $x + \lambda$ отличаются на 2π , откуда следует, что

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (29.33)$$

Зависимость фазовой скорости от частоты колебания приводит к искажению формы сложного сигнала, распространяющегося в линии. Такое явление получило название дисперсии волны в линии. Дисперсия волны в линии отсутствует, если коэффициент фазы пропорционален частоте колебаний:

$$\beta = \frac{\omega}{c}.$$

Линия без искажений. Линия не искажает передаваемого по ней сложного сигнала, если коэффициент затухания и фазовая скорость волны в ней на всех частотах одинаковы. Такое положение имеет место в том случае, когда выполняется условие

$$\frac{L_0}{R_0} = \frac{C_0}{G_0}. \quad (29.34)$$

В этом случае коэффициент затухания не зависит от частоты —

$$\alpha = \sqrt{R_0 G_0}, \quad (29.35)$$

а коэффициент фазы пропорционален частоте:

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (29.36)$$

Фазовая скорость в линии без искажений постоянна:

$$v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (29.37)$$

Лекция 30. Линия без потерь в стационарном режиме

Характеристики линии без потерь. Если потери в линии передачи достаточно малы, то в ряде случаев можно ее идеализировать и считать, что потери отсутствуют совсем. Такие допущения наиболее часто делают при работе линии на очень высокой частоте или при выполнении условий $\omega L_0 \gg R_0$, $\omega C_0 \gg G_0$. В этом случае влияние реактивных параметров линии возрастает настолько, что потери в ней можно не учитывать, поэтому считают $R_0 = G_0 = 0$.

Таким образом, линия без потерь характеризуется всего двумя первичными параметрами L_0 , C_0 или двумя вторичными параметрами

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = j\omega \sqrt{L_0 C_0} = j\beta \text{ [рад/м];} \quad (30.1)$$

$$Z_c = \sqrt{Z_0 / Y_0} = \sqrt{L_0 / C_0} = \rho \text{ [Ом].} \quad (30.2)$$

Из уравнения (30.1) следует, что для линии без потерь коэффициент фазы $\beta = \omega$ пропорционален частоте и, следовательно, фазовая скорость распространения электромагнитной волны в линии постоянна

$$v = \omega / \beta = 1 / \sqrt{L_0 C_0}. \quad (30.3)$$

Например, для двухпроводной линии с воздушным диэлектриком фазовая скорость не зависит от частоты и равна

$$v = [0,4 \ln(2a/d) \cdot 27,8 / \ln(2a/d)]^{1/2} 10^8 = 3 \cdot 10^8 \text{ [м/с].}$$

В линиях с твердым диэлектриком скорость распространения волны в $\sqrt{\epsilon, \mu}$ раз меньше.

Уравнения линии без потерь. Уравнения линии без потерь можно получить, используя уравнения линии с потерями, приведенные в табл. 29.2. Так, например, уравнения линии в гиперболических функциях с граничными условиями U_2, I_2 в ее конце после замены гиперболических функций круговыми, приводят к уравнениям линии

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta y + j \dot{I}_2 \rho \sin \beta y, \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos \beta y + j \dot{U}_2 \sin \beta y / \rho. \end{cases} \quad (30.4)$$

$$\quad (30.4a)$$

Положив в уравнениях (30.4) и (30.4a) $y = l$, находим входное сопротивление линии без потерь

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_2 \frac{1 + j \rho \operatorname{tg} \beta l / Z_2}{1 + j Z_2 \operatorname{tg} \beta l / \rho}. \quad (30.5)$$

Линия без потерь, согласованная с нагрузкой. Схема включения согласованной линии без потерь приведена на рис. 30.1, а. Условием согласования линии с нагрузкой является равенство сопротивления нагрузки Z_2 характеристическому сопротивлению линии Z_0 . При этом уравнения линии (30.4) упрощаются и принимают вид

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 e^{j\beta y} = U_1 e^{-j\beta(l-y)}, \\ \dot{i} = \dot{i}_2 e^{j\beta y} = I_1 e^{-j\beta(l-y)}. \end{cases} \quad (30.6)$$

Входное сопротивление согласованной линии равно сопротивлению нагрузки, т. е.

$$Z_{\text{вх}} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = \dot{U}_2 / \dot{I}_2 = \rho. \quad (30.7)$$

Если известно мгновенное значение напряжения на входе линии, $u_1 = U_{m1} \cos(\omega t + \psi_{u_1})$ то из уравнений (30.6) и (30.6а) следует, что напряжение и ток в произвольном сечении линии имеют вид

$$\begin{cases} u = U_{m1} \cos[\omega t - \beta(l-y) + \psi_{u_1}], \\ i = \frac{U_{m1}}{\rho} \cos[\omega t - \beta(l-y) + \psi_{u_1}]. \end{cases} \quad (30.8)$$

Из уравнений (30.8) и (30.8а) следуют основные особенности распространения волны в согласованной линии без потерь:

- в любой точке линии напряжение и ток отличаются по фазе от напряжения и тока на входе линии на величину $\beta x = \beta(l-y)$;
- разность фаз между напряжением в начале и в конце линии равна величине βl , которая называется *электрической длиной линии*;
- напряжение и ток в любой точке линии совпадают по фазе, а их отношение равно характеристическому сопротивлению линии;
- любая точка на фронте волны перемещается в линии со скоростью $v = \omega/\beta$;
- действующее значение напряжения и тока в любой точке линии постоянное.

Такой процесс распространения напряжения и тока в линии называется режимом *бегущей волны*. Графики действующего значения напряжения и тока в линии приведены на рис. 30.1,б.

Линия без потерь, замкнутая на конце. Схема включения линии без потерь, замкнутой на конце, приведена на рис. 30.2, а. В конце этой линии

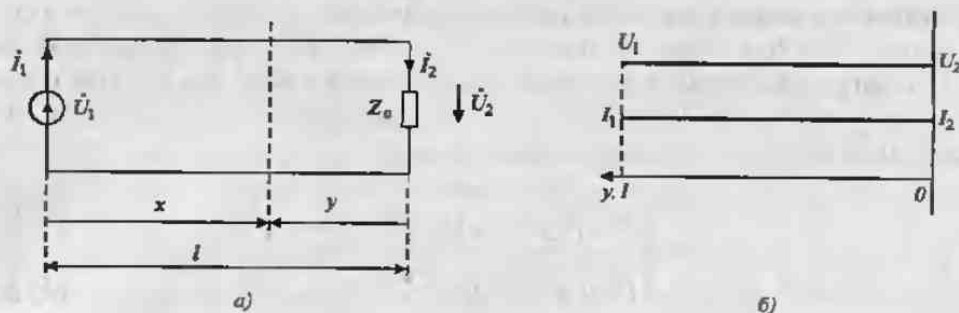


Рис. 30.1. Включение согласованной линии без потерь

установлена перемычка, напряжение на которой $U_2 = 0$. Комплексные значения напряжения и тока в такой линии можно получить из уравнений (30.4) и (30.4а), положив в них $U_2 = 0$

$$\dot{U} = jI_2 \rho \sin \beta y, \quad (30.9)$$

$$\dot{I} = I_2 \cos \beta y. \quad (30.9a)$$

Действующие значения напряжения и тока изменяются вдоль линии по уравнениям

$$\begin{cases} \dot{U} = I_2 \rho |\sin \beta y|, \\ \dot{I} = I_2 |\cos \beta y|. \end{cases} \quad (3.10)$$

$$(3.10a)$$

Графики изменений действующих значений напряжения и тока в линии приведены на рис. 30.2, б. Из этого рисунка видно, что в линии имеются «узлы» напряжения и тока, т. е. точки на линии, в которых напряжение или ток обращаются в нуль. В линии также имеются «пучности» напряжения и тока, т. е. такие точки на линии, в которых напряжение или ток достигают максимального значения. Узлы и пучности отстоят друг от друга на расстояние $\Delta y = \lambda/4$.

Такой процесс распространения волн в линии называется режимом *стоячей волны*, который имеет следующие особенности:

□ режим стоячей волны возникает в линии только при полном отсутствии в ней потерь,

□ стоячая волна в линии появляется благодаря наложению (интерференции) падающих и отраженных волн, распространяющихся в противоположных направлениях,

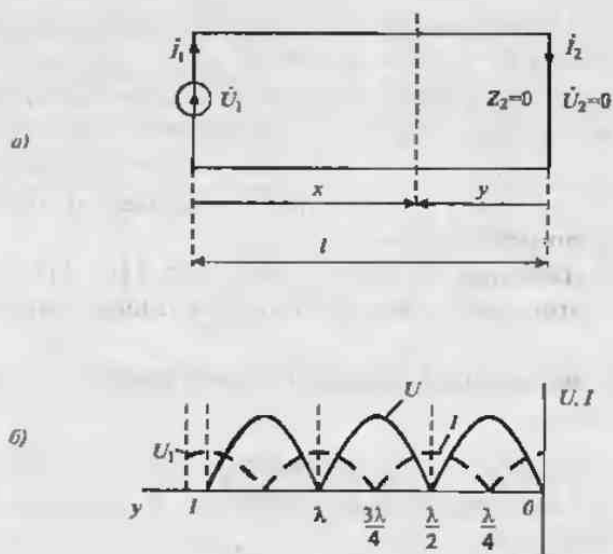


Рис. 30.2. Включение замкнутой линии без потерь (а), графики напряжения и тока в ней (б)

□ действующие (и амплитудные) значения напряжения и тока изменяются вдоль линии по гармоническому закону, образуя пучности в тех точках линии, где фазы падающей и отраженной волн совпадают;

□ в тех точках линии, где падающие и отраженные волны находятся в противофазе, образуются узлы напряжения или тока;

□ отношение действующих значений напряжения и тока в пучностях равно волновому сопротивлению линии;

□ напряжение и ток в любой точке линии сдвинуты по фазе между собой на угол $\pm 90^\circ$.

Входное сопротивление замкнутой на конце линии можно найти из уравнений (3.10) и (3.10а), поделив их друг на друга и положив $y = l$

$$Z_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = j \rho \operatorname{tg} \beta l. \quad (3.11)$$

Из уравнения (3.11) следует, что входное сопротивление линии, замкнутой на конце, имеет следующие особенности:

□ оно является мнимой величиной, т. е. имеет реактивный характер;

□ знак реактивного входного сопротивления изменяется через $\Delta l = \lambda/4$;

□ при положительном значении входного сопротивления отрезок линии эквивалентен индуктивности;

- при отрицательном значении входного сопротивления отрезок линии эквивалентен емкости;
- в узлах напряжения входное сопротивление обращается в нуль, а в узлах тока — в бесконечность,
- отрезки короткозамкнутой линии длиной $l = \lambda(2n+1)/4$ имеют бесконечно большое входное сопротивление и эквивалентны параллельному колебательному контуру;
- отрезки короткозамкнутой линии длиной $l = \lambda(n+1)/2$ имеют нулевое входное сопротивление и эквивалентны последовательному колебательному контуру;
- частоты резонансов тока зависят от длины линии l , ее первичных параметров L_0, C_0 и определяются по формуле

$$\omega_{\text{рт}} = \frac{(2n+1)\pi}{2l\sqrt{L_0C_0}},$$

- аналогично, частоты резонансов напряжения определяются по формуле

$$\omega_{\text{рн}} = \frac{(n+1)\pi}{l\sqrt{L_0C_0}}.$$

График зависимости входного сопротивления линии от ее длины приведен на рис. 30.3.

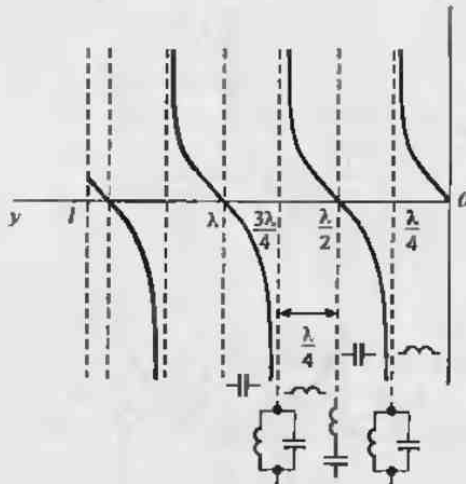


Рис. 30.3. Входное сопротивление замкнутой линии без потерь

Линия без потерь, разомкнутая на конце. Схема включения линии без потерь, разомкнутой на конце, приведена на рис. 30.4, а.

Поскольку в конце линии имеется разрыв цепи, то ток $I_2 = 0$. Комплексные значения напряжения и тока в разомкнутой линии получаем из уравнений (30.4) и (30.4а), полагив в них $I_2 = 0$

$$\dot{U} = U_2 \cos \beta y, \quad (30.12)$$

$$\dot{I} = jU_2 \sin \beta y / \rho. \quad (30.12a)$$

Действующие значения напряжения и тока в линии характеризуются уравнениями

$$\dot{U} = U_2 |\cos \beta y|, \quad (30.13)$$

$$I = \frac{U_2}{\rho} |\sin \beta y|. \quad (30.13a)$$

Графики изменений действующих значений напряжения и тока в линии приведены на рис. 30.4, б. Как видно из этого рисунка, в линии также имеются узлы и пучности напряжения и тока. Следовательно, в линии без потерь, разомкнутой на конце, существует режим стоячей волны, который подобен аналогичному режиму в замкнутой линии.

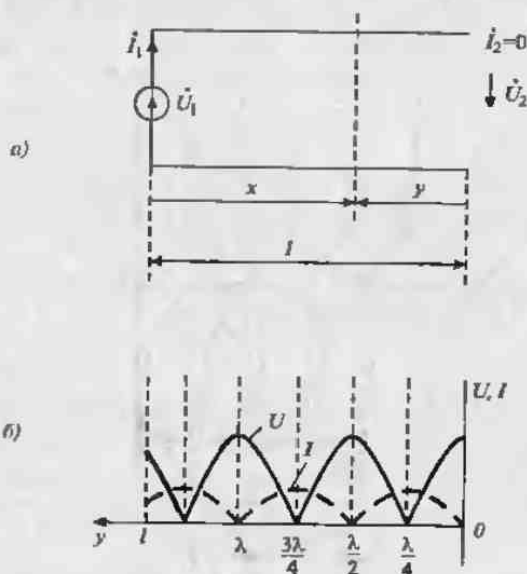


Рис. 30.4. Включение разомкнутой линии без потерь (а), графики напряжения и тока в ней (б)

Входное сопротивление линии, разомкнутой на конце, можно найти из уравнений (3.12) и (3.12а) при $y = l$

$$Z_{\text{вх}} = -j\rho \operatorname{ctg} \beta y = -jx_{\text{вх}}. \quad (30.14)$$

Из уравнения (3.14) следует, что входное сопротивление линии, разомкнутой на конце, имеет следующие особенности:

- оно имеет реактивный характер,
- знак реактивности изменяется через промежуток $\Delta l = \lambda/4$,
- при $0 \leq l \leq \lambda/4$ входное сопротивление имеет емкостной характер,
- в узлах напряжения входное сопротивление обращается в нуль, в узлах тока — в бесконечность,
- в узлах напряжения линия эквивалентна последовательному резонансному контуру,
- в узлах тока линия эквивалентна параллельному колебательному контуру.

Графики зависимости входного сопротивления линии от ее длины приведены на рис. 30.5.

Стоячие волны в линии. Стоячие волны напряжения и тока в линии возникают в том случае, если в самой линии или ее нагрузке не происходит поглощения энергии, поступающей от источника. Теоретически это может быть в том случае, когда используется линия без потерь, разомкнутая или замкнутая на конце, а также нагруженная на любое реактивное сопротивление $Z_2 = \pm jx_2$ (индуктивное или емкостное).

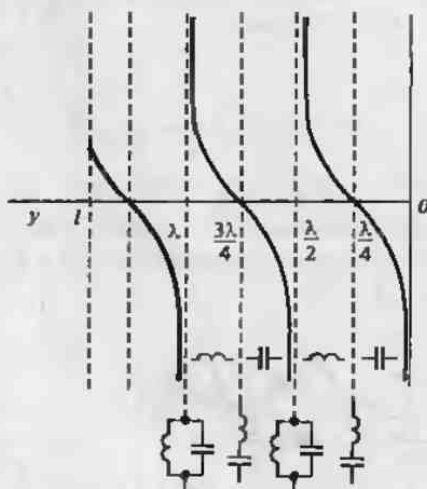


Рис. 30.5. Входное сопротивление разомкнутой линии без потерь

Если линия без потерь разомкнута на конце ($Z_2 = \infty$), то в ней происходит полное отражение энергии от конца линии. При этом амплитуды падающей и отраженной волн напряжения оказываются одинаковыми и совпадают по фазе. В результате на конце линии амплитуда напряжения будет в два раза больше амплитуды падающей волны, т. е. $U_2 = 2U_n$.

Амплитуды падающей и отраженной волн тока в разомкнутой линии также одинаковы, но в отличие от напряжения на конце линии они сдвинуты на 180° . В результате ток в конце линии равен нулю.

Для линии, замкнутой на конце ($Z_2 = 0$), наоборот, падающие и отраженные волны тока совпадают по фазе, поэтому ток в конце линии в два раза больше тока падающей волны, т. е. $I_2 = 2I_n$. В то же время падающая и отраженная волны напряжения оказываются в противофазе и, следовательно, вычитаются. В результате напряжение на конце линии равно нулю.

Линия без потерь, нагруженная на реактивное сопротивление. Выше было показано, что входное сопротивление разомкнутой или замкнутой на конце линии является реактивным, а его значение зависит от длины линии l . Это позволяет считать, что линия без потерь, нагруженная на емкость C_2 (рис. 30.6, а), эквивалентна более длинной разомкнутой линии. Напряжение, ток и входное сопротивление такой линии определяются выражениями

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{\dot{U}_2}{\cos \beta \Delta l} \cos \beta (y + \Delta l), & (30.15) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{i} = j \frac{\dot{U}_2}{\rho \cos \beta \Delta l} \sin \beta (y + \Delta l), & (30.15a) \end{cases}$$

$$Z_{\text{вх}} = -j \rho \operatorname{ctg} \beta (l + \Delta l), \quad (30.16)$$

где $\Delta l = \operatorname{arctg}(\rho \omega C_2) / \beta$ — эффективное удлинение линии.

Линия, нагруженная на индуктивность L_2 (рис. 30.6, б), эквивалентна более длинной замкнутой на конце линии. Напряжение, ток и входное сопротивление такой линии записываются в виде

$$\begin{cases} \dot{U} = j \frac{\dot{I}_2 \rho}{\cos \beta \Delta l} \sin \beta (y + \Delta l), & (30.17) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{i} = j \frac{\dot{I}_2}{\cos \beta \Delta l} \cos \beta (y + \Delta l), & (30.18) \end{cases}$$

$$Z_{\text{вх}} = j\rho \operatorname{tg} \beta(l + \Delta l), \quad (30.19)$$

где $\Delta l = \operatorname{arctg}(\omega L_2 / \rho)$ — эффективное удлинение линии.

Все сказанное позволяет сформулировать основные особенности работы линии без потерь, нагруженной на индуктивность или емкость:

- в линии, нагруженной на индуктивность, первой от конца линии всегда будет пучность напряжения и узел тока (рис. 30.6, а),
- в линии, нагруженной на емкость, первым от конца всегда будет узел напряжения и пучность тока (рис. 30.6, б),
- при расчете линии, нагруженной на реактивное сопротивление, можно пользоваться уравнениями, полученными для режимов разомкнутой или замкнутой линии, перенеся начало отсчета на Δl .

Согласование линии с нагрузкой. Если линия используется для передачи энергии сигнала в нагрузку, то основным режимом ее работы является режим бегущей волны. При этом, если сопротивление нагрузки не равно волновому сопротивлению кабеля, то для обеспечения согласования используются различные устройства: короткозамкнутые или разомкнутые шлейфы, трансформаторы сопротивлений и др.

Наиболее часто для согласования линии с нагрузкой используются короткозамкнутые шлейфы и четвертьволновые трансформаторы сопротивления.

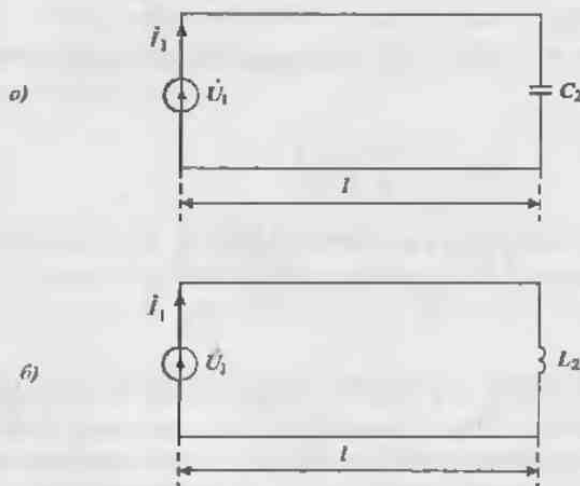


Рис. 30.6. Линия, нагруженная на емкость (а) и на индуктивность (б)

Короткозамкнутым шлейфом называется отрезок короткозамкнутой линии, подключаемой для согласования линии с нагрузкой. Такой шлейф подключается к линии вблизи нагрузки в такой точке, в которой комплексная проводимость линии со стороны нагрузки равна

$$Y_{\text{вх.л}} = \frac{1}{\rho} - jb. \quad (30.20)$$

Схема подключения шлейфа показана на рис. 30.7, а. Так как входное сопротивление короткозамкнутого шлейфа реактивное, то, подобрав его длину так, чтобы его входная проводимость была равна

$$Y_{\text{вх.ш}} = jb, \quad (30.20a)$$

получим суммарную проводимость в точке подключения шлейфа

$$Y_{\text{вх}} = Y_{\text{вх.л}} + Y_{\text{вх.ш}} = \frac{1}{\rho}. \quad (30.20б)$$

Таким образом, входное сопротивление линии в месте подключения шлейфа будет активное и равное волновому. В этом случае на участке линии от генератора до места включения шлейфа будет существовать только бегущая волна.

Если комплексный коэффициент отражения волны в линии

$$\tilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2 e^{j\Phi},$$

где Γ_2 — модуль коэффициента отражения от конца линии, а Φ — его аргумент, то место включения шлейфа можно определить, пользуясь уравнениями

$$\begin{cases} l_1 = \frac{\Phi - \arccos(-\Gamma_2)}{2\beta}, & (30.21) \\ l_2 = \frac{1}{\beta} \arctg\left(-\frac{\sqrt{1-\Gamma_2^2}}{2\Gamma_2}\right). & (30.22) \end{cases}$$

Для согласования линии с нагрузкой можно также использовать четвертьволновый трансформатор. *Четвертьволновым трансформатором сопротивления* называется отрезок линии длиной $\lambda/4$ с волновым сопротивлением $\rho_{\text{тр}} = \rho$, который включается между нагрузкой и источником, как показано на рис. 30.7, б. Место включения трансформатора выбирается таким образом, чтобы он был нагружен активным сопротивлением

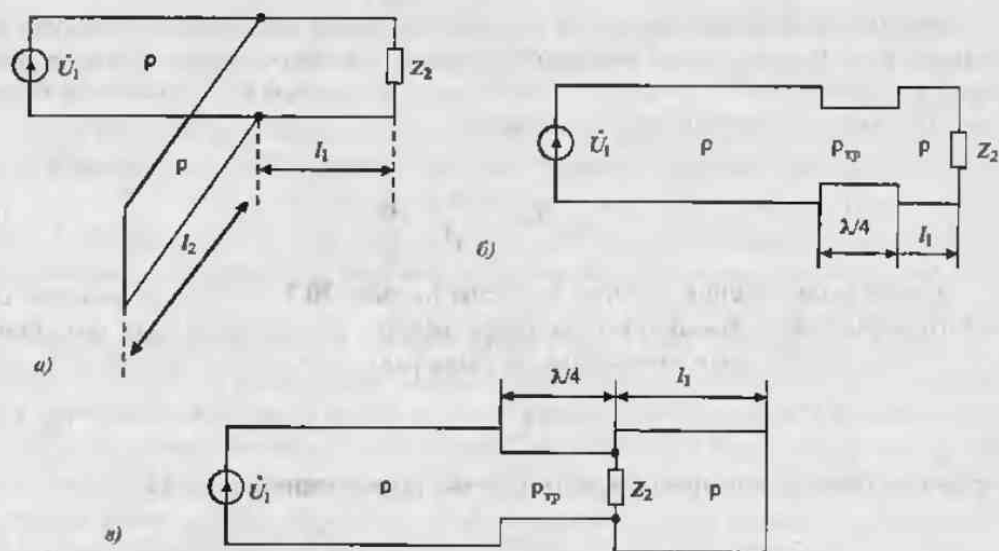


Рис. 30.7. Согласование линии с нагрузкой:
с помощью шлейфа (а), с помощью четвертьволнового трансформатора (б),
с помощью шлейфа и трансформатора (в)

$$r_{\text{тр}} = \rho \frac{Z_2 + j\rho \operatorname{tg} \alpha l_1}{\rho + jZ_2 \operatorname{tg} \alpha l_1} \quad (30.23)$$

При этом волновое сопротивление трансформатора можно определить, пользуясь выражением

$$\rho_{\text{тр}} = \sqrt{r_{\text{вх}} \rho}. \quad (30.24)$$

Если трансформатор подключается непосредственно к нагрузке, то для компенсации реактивного сопротивления нагрузки, используются реактивные шлейфы, как показано на рис. 30,7, в.

Применение линии без потерь. Основными применениями линии без потерь являются:

- передача электромагнитной энергии от одного устройства к другому;
- в качестве устройств согласования линии с нагрузкой;
- в качестве элементов колебательных систем;
- в качестве измерительных устройств.

При использовании линии для передачи энергии используется режим бегущей волны, при котором требуется выполнить условие согласования линии с нагрузкой.

Отрезки линии без потерь могут быть использованы для согласования нагрузки с основной линией передачи. Для этой цели обычно используются четвертьволновые трансформаторы и короткозамкнутые шлейфы.

Отрезки короткозамкнутых или разомкнутых линий передачи часто используются в качестве колебательных контуров или реактивных элементов (индуктивностей или емкостей).

Линия без потерь может быть использована в измерительных целях. Ее возможности позволяют измерять длину волны, коэффициенты бегущей волны, сопротивления нагрузки, напряжение и ток в линии передачи. Например, для измерения напряжения в линии можно использовать четвертьволновый отрезок линии, нагруженный на амперметр, с малым внутренним сопротивлением. При этом входное сопротивление такого измерительного устройства очень высокое (теоретически бесконечное) и не оказывает влияния на линию передачи.

Энергетические соотношения в линии. Мощность, отдаваемая источником в линию,

$$P_1 = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_1 \dot{I}_1 \right]. \quad (30.25)$$

Мощность, потребляемая нагрузкой,

$$P_2 = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_2 \dot{I}_2 \right]. \quad (30.26)$$

Если линия согласована с нагрузкой, то $P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_c$, $P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_c$.

КПД линии передачи определяется отношением мощности, потребляемой нагрузкой, к мощности, отдаваемой источником,

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}. \quad (30.27)$$

Для согласованной линии КПД имеет значение

$$\eta_c = e^{-2\alpha l}. \quad (30.28)$$

В линии без потерь, работающей на реактивную нагрузку, замкнутой или разомкнутой на конце, существует режим стоячих волн, при котором мощность

в узлах напряжения или тока равна нулю. В остальных точках линии мощность реактивная, так как напряжение и ток сдвинуты по фазе на 90° . В этом случае энергия по линии не передается.

Если нагрузка линии активная, то узлы напряжения и тока в линии исчезают. Активная мощность, поступающая в нагрузку, определяется выражением

$$P_2 = \rho I_{\text{макс}} I_{\text{мин}} = \frac{U_{\text{макс}} I_{\text{мин}}}{\rho}. \quad (30.29)$$

Максимальная мощность передается только в согласованную с линией нагрузку, т. е. при $Z_2 = \rho$:

$$P_{2\text{макс}} = I_n^2 \rho = \frac{U_n^2}{\rho}, \quad (30.30)$$

где I_n и U_n — действующие значения тока и напряжения падающей волны.

Лекция 31. Нестационарные процессы в длинных линиях

Уравнения линии в нестационарном режиме. Длинные линии и их отрезки используются в качестве формирователей импульсов, элементов задержки сигналов, накопителей энергии и во многих других практически важных случаях. В таких применениях длинные линии работают в нестационарных режимах. Анализ этих процессов обычно выполняется при помощи уравнений линий в операторной форме с учетом (или без учета) ненулевых начальных условий.

Рассмотрим двухпроводную длинную линию с потерями, изображенную на рис. 31.1. Дифференциальные уравнения для мгновенных значений напряжения и тока в произвольном сечении линии имеют вид (вывод дифференциальных уравнений линии приводится в лекции 29)

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \quad (31.1)$$

$$(31.1a)$$

где мгновенные значения напряжения $u = u(x, t)$ и тока $i = i(x, t)$ являются функциями координаты x и времени t .

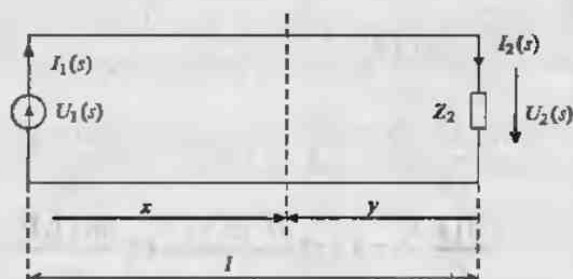


Рис. 31.1. Схема включения двухпроводной линии

Применяя преобразование Лапласа к уравнениям (31.1) и (31.1а), получим систему уравнений в полных производных

$$\begin{cases} -\frac{dU(s, x)}{dx} = R_0 I(s, x) + L_0 [sI(s, x) - i(x, 0)], & (31.2) \\ -\frac{dI(s, x)}{dx} = G_0 U(s, x) + C_0 [sU(s, x) - u(x, 0)], & (31.2a) \end{cases}$$

где $U(s, x) \doteq u(x, t)$ и $I(s, x) \doteq i(x, t)$ — операторные изображения мгновенных значений напряжения и тока в линии;

$u(x, 0)$ и $i(x, 0)$ — ненулевые начальные условия для напряжения и тока в линии, соответственно.

Вводя обозначения *погонных операторных сопротивлений* и *проводимостей*

$$\begin{cases} Z_0(s) = R_0 + sL_0, & (31.3) \\ Y_0(s) = G_0 + sC_0, & (31.3a) \end{cases}$$

представим уравнения (31.2) и (31.2а) в виде

$$-\frac{dU(s, x)}{dx} = Z_0(s)I(s, x) - L_0 i(x, 0), \quad (31.4)$$

$$-\frac{dI(s, x)}{dx} = Y_0(s)U(s, x) + C_0 u(x, 0). \quad (31.4a)$$

Для разделения переменных в уравнениях (31.4) и (31.4а) продифференцируем эту систему уравнений по x

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 U(s, x)}{dx^2} = Z_0(s) \frac{dI(s, x)}{dx} - L_0 \frac{di(x, 0)}{dx}, \\ -\frac{d^2 I(s, x)}{dx^2} = Y_0(s) \frac{dU(s, x)}{dx} - C_0 \frac{du(x, 0)}{dx}. \end{array} \right. \quad (31.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 U(s, x)}{dx^2} = Z_0(s) \frac{dI(s, x)}{dx} - L_0 \frac{di(x, 0)}{dx}, \\ -\frac{d^2 I(s, x)}{dx^2} = Y_0(s) \frac{dU(s, x)}{dx} - C_0 \frac{du(x, 0)}{dx}. \end{array} \right. \quad (31.5a)$$

Произведя подстановку значений первых производных из уравнений (31.4), (31.4а) в уравнения (31.3), (31.3а), получим операторные уравнения линии с разделенными переменными

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 U(s, x)}{dx^2} - Z_0(s) Y_0(s) U(s, x) = L_0 \frac{di(x, 0)}{dx} - C_0 Z_0(s) u(x, 0), \\ -\frac{d^2 I(s, x)}{dx^2} - Z_0(s) Y_0(s) I(s, x) = C_0 \frac{du(x, 0)}{dx} - L_0 Y_0(s) i(x, 0). \end{array} \right. \quad (31.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 U(s, x)}{dx^2} - Z_0(s) Y_0(s) U(s, x) = L_0 \frac{di(x, 0)}{dx} - C_0 Z_0(s) u(x, 0), \\ -\frac{d^2 I(s, x)}{dx^2} - Z_0(s) Y_0(s) I(s, x) = C_0 \frac{du(x, 0)}{dx} - L_0 Y_0(s) i(x, 0). \end{array} \right. \quad (31.6a)$$

Система уравнений линии (31.6) и (31.6а) позволяет определить операторные значения напряжения и тока в произвольном сечении линии при любых начальных условиях.

При нулевых начальных условиях $u(x, 0) = 0$ и $i(x, 0) = 0$ система уравнений (31.6) и (31.6а) упрощается и принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 U(s, x)}{dx^2} - Z_0(s) Y_0(s) U(s, x) = 0, \\ -\frac{d^2 I(s, x)}{dx^2} - Z_0(s) Y_0(s) I(s, x) = 0. \end{array} \right. \quad (31.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 U(s, x)}{dx^2} - Z_0(s) Y_0(s) U(s, x) = 0, \\ -\frac{d^2 I(s, x)}{dx^2} - Z_0(s) Y_0(s) I(s, x) = 0. \end{array} \right. \quad (31.7a)$$

Вводя значение операторного коэффициента передачи линии $\gamma(s) = \sqrt{Z_0(s) Y_0(s)}$, запишем уравнения линии форме

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 U(s, x)}{dx^2} - \gamma^2(s) U(s) = 0, \\ -\frac{d^2 I(s, x)}{dx^2} - \gamma^2(s) I(s) = 0. \end{array} \right. \quad (31.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 U(s, x)}{dx^2} - \gamma^2(s) U(s) = 0, \\ -\frac{d^2 I(s, x)}{dx^2} - \gamma^2(s) I(s) = 0. \end{array} \right. \quad (31.8a)$$

Решение уравнений линии при нулевых начальных условиях.

Решение уравнений линии (31.8) для напряжения ищем в виде

$$U(s, x) = Ae^{-\gamma(s)x} + Be^{\gamma(s)x}, \quad (31.9)$$

где $-\gamma(s)$ и $+\gamma(s)$ — корни характеристического уравнения,

A и B — постоянные интегрирования.

Аналогично находим решение для тока в линии

$$I(s, x) = \frac{A}{Z_c(s)} e^{-\gamma(s)x} - \frac{B}{Z_c(s)} e^{\gamma(s)x}, \quad (31.9a)$$

где $Z_c(s) = \sqrt{Z_0(s)/Y_0(s)}$ — операторное значение волнового сопротивления линии.

Для определения постоянных интегрирования необходимо воспользоваться граничными условиями. Рассмотрим три типа наиболее распространенных граничных условий:

- известны напряжение $U_1(s)$ и ток $I_1(s)$ в начале линии,
- известны напряжение $U_2(s)$ и ток $I_2(s)$ в конце линии,
- известны напряжение $U_1(s)$ и сопротивление нагрузки $Z_2(s)$.

Уравнения линии с граничными условиями в ее начале.

Если использовать граничные условия первого типа

$$\begin{cases} U_1(s) = U(s, 0), & (31.10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1(s) = I(s, 0), & (31.10a) \end{cases}$$

то постоянные интегрирования имеют значения

$$\begin{cases} A = \frac{U_1(s) + I_1(s)Z_c(s)}{2}, & (31.11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = \frac{U_1(s) - I_1(s)Z_c(s)}{2}. & (31.11a) \end{cases}$$

Подставив эти граничные условия в формулы (3.9) и (3.9a), получим уравнения линии в виде

$$\begin{cases} U(s, x) = \frac{U_1(s) + I_1(s)Z_c(s)}{2} e^{-\gamma(s)x} + \frac{U_1(s) - I_1(s)Z_c(s)}{2} e^{\gamma(s)x}, & (31.12) \\ I(s, x) = \frac{U_1(s) + I_1(s)Z_c(s)}{2Z_c(s)} e^{-\gamma(s)x} + \frac{U_1(s) - I_1(s)Z_c(s)}{2Z_c(s)} e^{\gamma(s)x}. & (31.12a) \end{cases}$$

Полученные уравнения позволяют определить напряжение и ток в произвольном сечении линии при известных граничных условиях в ее начале.

Эти уравнения можно также представить с помощью гиперболических функций

$$\begin{cases} U(s, x) = U_1(s) \operatorname{ch} \gamma(s)x - I_1(s)Z_c(s) \operatorname{sh} \gamma(s)x, & (31.13) \\ I(s, x) = I_1(s) \operatorname{ch} \gamma(s)x - \frac{U_1(s)}{Z_c(s)} \operatorname{sh} \gamma(s)x. & (31.13a) \end{cases}$$

Уравнения линии с граничными условиями в ее конце.

Если использовать граничные условия второго типа

$$\begin{cases} U_2(s) = U(l, s), & (31.14) \\ I_2(s) = I(l, s), & (31.14a) \end{cases}$$

то, переходя к отсчету координаты y от конца линии, запишем уравнения линии в гиперболических функциях

$$\begin{cases} U(s, y) = U_2(s) \left[\operatorname{ch} \gamma(s)y + \frac{Z_c(s)}{Z_2(s)} \operatorname{sh} \gamma(s)y \right], & (31.15) \\ I(s, y) = \frac{U_2(s)}{Z_c(s)} \left[\frac{Z_c(s)}{Z_2(s)} \operatorname{ch} \gamma(s)y + \operatorname{sh} \gamma(s)y \right]. & (31.15a) \end{cases}$$

С помощью уравнений (31.15) и (31.15a) можно рассчитать напряжения и ток в линии при известных условиях на нагрузке. Однако, очень часто ток в начале и в конце линии неизвестен, а известно сопротивление нагрузки линии $Z_2(s)$. В этом случае применяются граничные условия третьего типа.

Уравнения линии при известном напряжении на ее входе и сопротивлении нагрузки. При использовании граничных условий третьего типа пред-

полагается, что известно напряжение генератора $U_1 = U(l, s)$ и сопротивление нагрузки $Z_2(s) = U_2(s)/I_2(s)$.

Полагая $y = l$, из уравнения (31.15) найдем

$$U_1(s) = U_2(s) \left[\operatorname{ch} \gamma(s)l + \frac{Z_c(s)}{Z_2(s)} \operatorname{sh} \gamma(s)l \right]. \quad (31.16)$$

Из уравнения (31.16) находим напряжение на нагрузке

$$U_2(s) = \frac{U_1(s)}{\operatorname{ch} \gamma(s)l + \frac{Z_c(s)}{Z_2(s)} \operatorname{sh} \gamma(s)l}. \quad (31.16a)$$

После подстановки значения напряжения (31.16a) в уравнения (31.15) и (31.15a), получим систему уравнений с требуемыми граничными условиями

$$\begin{cases} U(s, y) = U_1(s) \frac{\operatorname{ch} \gamma(s)y + Z_c(s) \operatorname{sh} \gamma(s)y / Z_2(s)}{\operatorname{ch} \gamma(s)l + Z_c(s) \operatorname{sh} \gamma(s)l / Z_2(s)}, & (31.17) \\ I(s, y) = \frac{U_1(s)}{Z_c(s)} \frac{Z_c(s) \operatorname{ch} \gamma(s)y / Z_2(s) + \operatorname{sh} \gamma(s)y}{Z_c(s) \operatorname{sh} \gamma(s)l / Z_2(s) + \operatorname{ch} \gamma(s)l} & (31.17a) \end{cases}$$

Очевидно, что с помощью уравнений (31.17) и (31.17a) можно определить напряжение и ток в любом сечении линии при известном напряжении на ее входе $U_1(s)$ и сопротивлении нагрузки $Z_2(s)$.

Пример 31.1. *Линия без потерь, согласованная с нагрузкой, используется для задержки сигнала на время $t_3 = 1$ мкс. Требуется определить напряжение на нагрузке при включении согласованной линии без потерь на постоянное напряжение E и рассчитать длину линии, если ее погонные параметры имеют следующие значения: $L_0 = 0,4$ мкГн/м, $C_0 = 100$ пФ/м.*

Решение. Схема включения линии на источник постоянного напряжения приведена на рис. 31.2. Для линии без потерь выполняются условия $R_0 = G_0 = 0$.

Из условия согласования линии с нагрузкой следует, что $Z_2 = Z_c$.

При этом уравнение (31.17) принимает вид

$$U(s, y) = U_1 \frac{\operatorname{ch} \gamma(s)y + \operatorname{sh} \gamma(s)y}{\operatorname{ch} \gamma(s)l + \operatorname{sh} \gamma(s)l} = E \frac{e^{\gamma y}}{e^{\gamma l}} = E e^{-\gamma(l-y)} = E e^{-\gamma x},$$

где $\gamma = s \sqrt{L_0 C_0}$ — коэффициент распространения волны в линии.

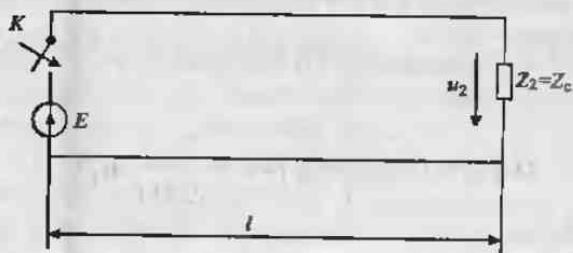


Рис. 31.2. Включение согласованной линии без потерь на постоянное напряжение

Напряжение на нагрузке определим, положив в этом уравнении $x = l$, тогда

$$U_2 = Ee^{-\gamma l} = Ee^{-st/v},$$

где показатель экспоненты имеет значение $\gamma l = s\sqrt{L_0 C_0} l = st/v$.

Мгновенное значение напряжения на нагрузке определяется с помощью обратного преобразования Лапласа по формуле запаздывания

$$Ee^{-s(t-t_0)} = E(t-t_0),$$

что соответствует идеальному звену задержки на время t_0 .

Время задержки определим по формуле

$$t_0 = l/v = l\sqrt{L_0 C_0}.$$

Требуемую длину линии определим по формуле

$$l = t_0 v = t_0 \sqrt{L_0 C_0} = 10^{-6} / \sqrt{0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-10}} = 63 \text{ м.}$$

Таким образом, напряжение на нагрузке появляется через время задержки, равное 1 мкс, если длина линии равна 63 м.

Волны в линии. Нестационарные процессы в линии сопровождаются распространением падающих и отраженных волн напряжения и тока. В связи с этим решения, которые были рассмотрены выше (31.12) и (31.12а), состоят из двух частей.

Решения в гиперболических функциях (31.13) и (31.13а) тоже состоят из двух частей, однако эти члены не соответствуют падающим и отраженным волнам, хотя и зависят от них.

Скорость распространения волн в линии зависит от параметров линии передачи. В линиях с воздушным диэлектриком скорость распространения равна скорости света $v = c = 3 \cdot 10^8$ м/с. В линиях с твердым или жидким диэлектри-

ком скорость распространения волн меньше скорости света и зависит от свойств диэлектрика.

При анализе нестационарных процессов в линиях, работающих на переменном токе, можно считать, что за время переходного процесса мгновенное значение сигнала существенно не изменится. Это позволяет выполнять анализ процессов в линиях на постоянном напряжении.

Если линия не согласована с нагрузкой, то в ней существуют как падающие, так и отраженные волны. В линии, согласованной с нагрузкой, существуют только падающие волны. Токи и напряжения падающих и отраженных волн в линии связаны соотношениями

$$I_{\text{пад}} = U_{\text{пад}} / Z_0, \quad I_{\text{отр}} = U_{\text{отр}} / Z_0.$$

Переходные процессы в линиях без потерь, не согласованных с нагрузкой и с генератором, обусловлены многократными отражениями от конца и начала линии. Если линия согласована с генератором, но не согласована с нагрузкой, то отраженная волна будет однократной.

Следует иметь в виду, что падающие и отраженные волны в линии появляются не сразу по всей длине линии. При подключении линии к источнику напряжения вначале возникает только падающая волна.

Отраженная волна появляется только тогда, когда падающая волна достигнет конца линии. Повторное отражение от источника, не согласованного с линией, происходит, когда отраженная от нагрузки волна дойдет до генератора.

Наиболее часто отраженные волны возникают в местах стыковки линий передачи с различными параметрами. Такие стыковки встречаются в различных разветвителях или объединителях сигналов. Если в результате этих стыковок возникают отраженные волны, то они приводят к искажению и ослаблению сигналов, передаваемых в линии.

При анализе переходных процессов в линии можно пользоваться уравнениями четырехполюсников в любой системе параметров. При этом коммутационные процессы в линии сводятся к аналогичным коммутационным процессам в эквивалентном четырехполюснике. Переходные процессы в линии могут возникать также при подключении к ней или отключении от нее каких-либо нагрузок. Эти процессы также приводят к появлению падающих и отраженных волн, которые искажают передаваемый сигнал.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ В СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Лекция 32. Электрические цепи с нелинейными резистивными элементами

Нелинейные резистивные элементы. Нелинейные резистивные элементы получили широкое распространение в современной электронной технике. По управляемости их можно разделить на две большие группы: неуправляемые и управляемые. К *неуправляемым резистивным* элементам можно отнести та-кие, параметры которых нельзя изменять при помощи *внешнего электрического сигнала*. К таким элементам относят большинство двухполюсных элементов электронной техники: диоды, динисторы, стабилитроны, туннельные диоды, терморезисторы, магниторезисторы, фотодиоды и некоторые другие элементы.

Условность этого определения следует из того, что почти все из перечисленных выше элементов управляемы, но не внешним электрическим сигналом, а различными другими физическими величинами: температурой, давлением, магнитным полем, световым потоком и др. Чаще всего такие элементы используются в качестве датчиков различных физических величин, к которым они проявляют наибольшую чувствительность.

Другую группу составляют *электрически управляемые резистивные элементы*. В таких элементах обычно имеется один (или несколько) дополнительных электродов, которые предназначены для подачи внешних электрических сигналов — токов или напряжений. К таким элементам обычно относят электровакуумные лампы: триоды, тетроды, пентоды и многие полупроводниковые приборы — биполярные и униполярные транзисторы, тиристоры, симисторы и др.

Особенностью этих приборов является их способность изменять некоторые параметры под действием внешних электрических сигналов, которые подводятся к дополнительным *управляющим* электродам.

Другое деление нелинейных резистивных элементов основано на рассмотрении их вольтамперных характеристик (ВАХ).

Некоторые из таких элементов могут иметь ВАХ с участками отрицательных дифференциальных сопротивлений или проводимостей.

В основу классификации может быть положено также *свойство инерционности* некоторых типов нелинейных резистивных элементов. Эта инерцион-

ность может быть обусловлена различными физическими процессами, происходящими в нелинейных резистивных элементах и характеризоваться их теплоемкостью, электрической емкостью, внутренней индуктивностью и др.

Некоторые типы ВАХ нелинейных резистивных элементов приведены на рис. 32.1. На рис. 32.1, а. приведена ВАХ полупроводникового диода. Особенностью этой ВАХ является деление ее на две области: область прохождения тока при прямом смещении p - n -перехода (область прямого тока) и область прохождения тока при обратном смещении p - n -перехода (область обратного тока). Математическая модель ВАХ полупроводникового диода устанавливается с помощью уравнения Эберса-Молла

$$I = I_s (e^{U/\varphi_i} - 1) \quad (32.1)$$

где I_s — ток насыщения p - n -перехода (темновой ток);

$\varphi_i = kT/q$ — тепловой потенциал;

k — постоянная Больцмана;

T — температура p - n -перехода в K .

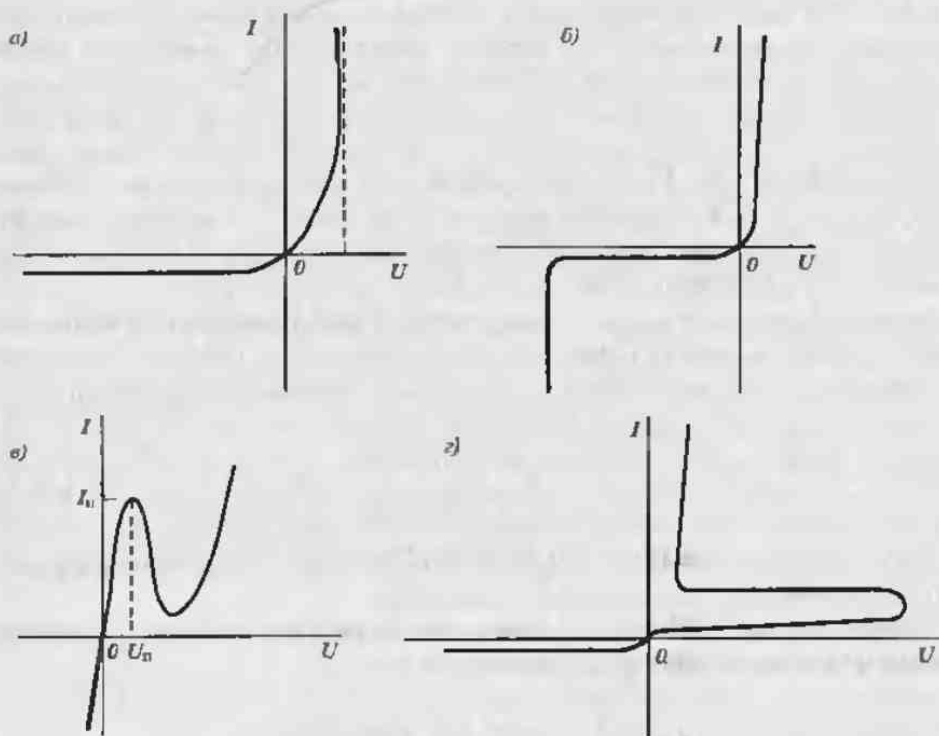


Рис. 32.1. Вольт-амперные характеристики электрически неуправляемых нелинейных элементов: диода (а), стабилизатора (б), туннельного диода (в) динистора (г)

На рис. 32.1, б приведена ВАХ полупроводникового стабилитрона. Режим стабилизации напряжения в таком приборе происходит при развитии лавинного пробоя. Особенностью ВАХ стабилитрона является наличие на ней участка, на котором резкое возрастание тока происходит при незначительном увеличении напряжения на p - n -переходе. Математическая модель ВАХ стабилитрона на участке лавинного пробоя устанавливается с помощью эмпирической формулы

$$I = I_S [1 - (U/U_n)^2], \quad (32.2)$$

где U_n — напряжение лавинного пробоя.

На рис. 32.1, в приведена ВАХ туннельного диода. Особенностью этой ВАХ является наличие на ней участка с отрицательным сопротивлением. На участке отрицательного сопротивления увеличение напряжения на p - n -переходе сопровождается уменьшением тока в нем.

Такой эффект связан с тем, что в тонких p - n -переходах за счет большой напряженности электрического поля в них происходит туннельный пробой, который при малом напряжении на переходе сопровождается резким ростом тока. Однако, при увеличении напряжения на переходе туннельный ток начинает уменьшаться и при некотором напряжении становится равным нулю. При дальнейшем повышении напряжения растет прямой (диффузионный) ток через переход. В результате на ВАХ туннельного диода появляется спадающий N -образный участок с отрицательным дифференциальным сопротивлением. Такая характеристика туннельного диода является однозначной при задании напряжения и неоднозначной — при задании тока.

Свойства туннельного диода сильно зависят от свойств исходного полупроводникового материала, степени его легирования примесями и ряда других характеристик. В связи с этим в настоящее время теория не дает простого выражения для его ВАХ. Поэтому в литературе приводится много различных приближенных формул (аппроксимаций), которые с достаточной для практики точностью описывают различные участки ВАХ или всю ВАХ в целом. Так, например, для участка туннельного тока можно использовать ВАХ, описываемую формулой

$$I = U \frac{I_n}{U_n} e^{(1-U/U_n)}, \quad (32.3)$$

где U_n и I_n — напряжение и ток, соответствующие пику туннельного тока (см. рис. 32.1, в).

Для описания всей ВАХ туннельного диода, включая его диффузионную составляющую тока, используют двухчленную формулу

$$I = U \frac{I_n}{U_n} e^{(1-U/U_n)} + I_S (e^{U/U_0} - 1), \quad (32.4)$$

первый член которой описывает туннельный ток, а второй — диффузионный.

Еще одна характерная ВАХ, которую имеют полупроводниковые многослойные диоды — динисторы, приведена на рис. 32.1, з. Эта характеристика также имеет участок с отрицательным сопротивлением, однако ток через прибор появляется при высоком напряжении на нем. После появления тока напряжение на приборе резко понижается, а ток продолжает расти. ВАХ такого типа называется S-образной. Такая характеристика прибора является однозначной при задании тока и неоднозначной — при задании напряжения.

На участке прямого тока через динистор в проводящем (открытом) состоянии ВАХ описывается выражением

$$U = \varphi_T \ln (I/I_S). \quad (32.5)$$

Рассмотренные примеры достаточно наглядно показывают, что ВАХ многих нелинейных резистивных элементов даже при упрощенном рассмотрении описываются достаточно сложными трансцендентными уравнениями. При этом отдельные участки ВАХ могут описываться различными уравнениями.

Аналогичное положение возникает при рассмотрении управляемых нелинейных резистивных элементов, таких как транзисторы или тиристоры. Так, например, ВАХ биполярного транзистора в «линейном» режиме работы представляет собой семейство кривых, определяемых уравнением

$$I_K = I_{KBO} (e^{U_{БЭ}/\varphi_T} - 1), \quad (32.6)$$

где I_K — ток коллектора транзистора;

I_{KBO} — обратный ток коллекторного перехода;

$U_{БЭ}$ — напряжение управления между базой и эмиттером;

φ_T — тепловой потенциал.

Уравнение (32.6) показывает, что ток коллектора теоретически не зависит от напряжения на коллекторе, а зависит только от управляющего напряжения, приложенного между базой и эмиттером $U_{БЭ}$. Семейство ВАХ, соответствующее уравнению (32.6), показано на рис. 32.2, а.

ВАХ униполярных транзисторов состоят из двух частей. В первой части (понасыщенной области) ВАХ описывается уравнением

$$I_C = 2k[(U_{П} - U_{ЗН})U_{СИ} - U_{СИ}^2/2], \quad (32.7)$$

где $U_{П}$ — пороговое напряжение;

I_C — ток стока;

$U_{СИ}$ — напряжение между стоком и истоком;

$U_{ЗН}$ — напряжение между затвором и истоком (управляющее напряжение);

k — постоянный коэффициент.

Во второй части (области насыщения) ВАХ униполярного транзистора описывается уравнением

$$I_C = k(U_{\Pi} - U_{ЭН})^2. \quad (32.8)$$

Графики ВАХ униполярного транзистора приведены на рис. 32.2, б. Из этих графиков видно, что в области насыщения ток стока униполярного транзистора теоретически не зависит от напряжения на стоке, а зависит только от напряжения $U_{ЭН}$ (управляющего напряжения).

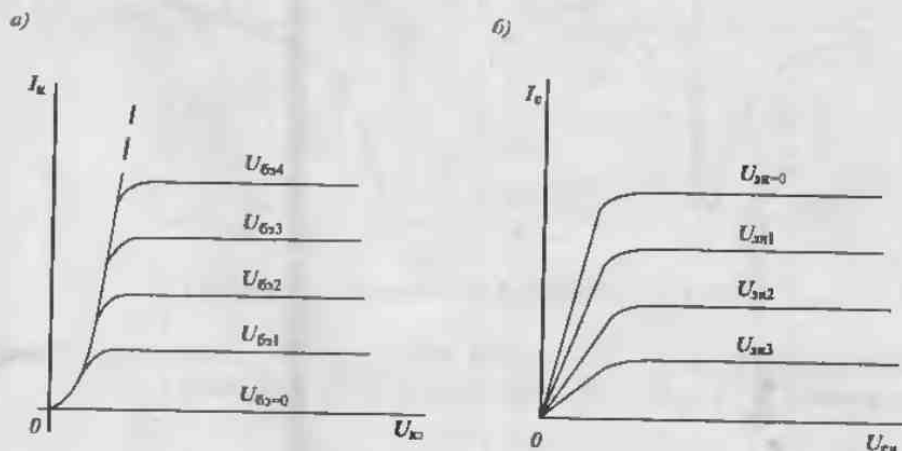


Рис. 32.2. Вольт-амперные характеристики биполярного (а) и униполярного (б) транзисторов.

Все рассмотренные ВАХ являются *несимметричными*, так как значение тока зависит от полярности приложенного напряжения. В то же время некоторые из нелинейных элементов имеют *симметричные* ВАХ, для которых изменение полярности приложенного к ним напряжения не отражается на значении тока. К таким элементам относятся терморезисторы, позисторы и некоторые другие электронные элементы. Типовые симметричные ВАХ нелинейных элементов приведены на рис. 32.3. На рис. 32.3, а приведена ВАХ терморезистора с отрицательным температурным коэффициентом.

В установленном режиме нагрева терморезистора протекающим по нему током вся мощность рассеивается в окружающую среду, поэтому можно записать уравнение теплового баланса $UI = b\Delta T$, где b — коэффициент рассеяния тепла в окружающую среду, ΔT — температура перегрева, т. е. разность между температурой T терморезистора и температурой окружающей среды T_0 . Отсюда находим ВАХ терморезистора

$$U = b\Delta T/I, \quad (32.9)$$

которая представляет собой равностороннюю гиперболу.

Симметричную ВАХ имеют также варисторы — нелинейные резисторы, сопротивление которых зависит от напряженности электрического поля. ВАХ

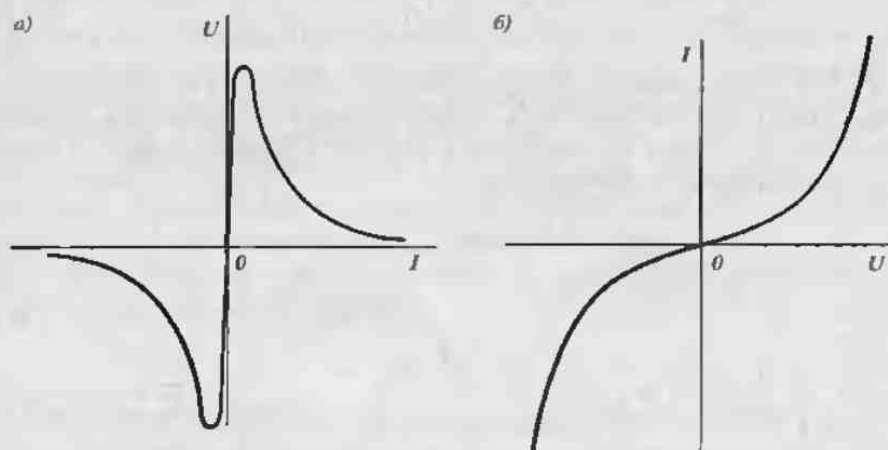


Рис. 32.3. Симметричные ВАХ терморезистора (а) и варистора (б)

меднозакисного варистора приведена на рис. 32.3, б. В установленном диапазоне напряжений ВАХ варистора аппроксимируют выражением

$$I = BU^b, \quad (32.10)$$

где b — коэффициент нелинейности варистора.

Еще более сложные ВАХ имеют нелинейные элементы специального назначения, выполненные в виде интегральных микросхем. В настоящее время имеется довольно много подобного рода функциональных преобразователей: перемножителей напряжений, логарифматоров, модуляторов и др. Так, например, передаточная характеристика перемножителя напряжений имеет вид, приведенный на рис. 32.4. Эта передаточная характеристика определяется уравнением

$$U_{\text{вых}} = U_x U_y / 10, \quad (32.11)$$

которое использовано при построении графика.

На базе такого перемножителя могут быть построены квадратизирующие преобразователи, модуляторы и некоторые другие функциональные преобразователи.

Методы расчета цепей с нелинейными резистивными элементами. Расчет цепей с нелинейными резистивными элементами может выполняться графическими или аналитическими методами. При расчете цепей с нелинейными резистивными элементами как аналитическими, так и графическими методами необходимо учитывать инерционные свойства этих элементов и скорость изменения напряжения и тока.

Если инерционностью нелинейного элемента можно пренебречь, то используются ВАХ для мгновенных значений напряжений и токов. Если же инер-

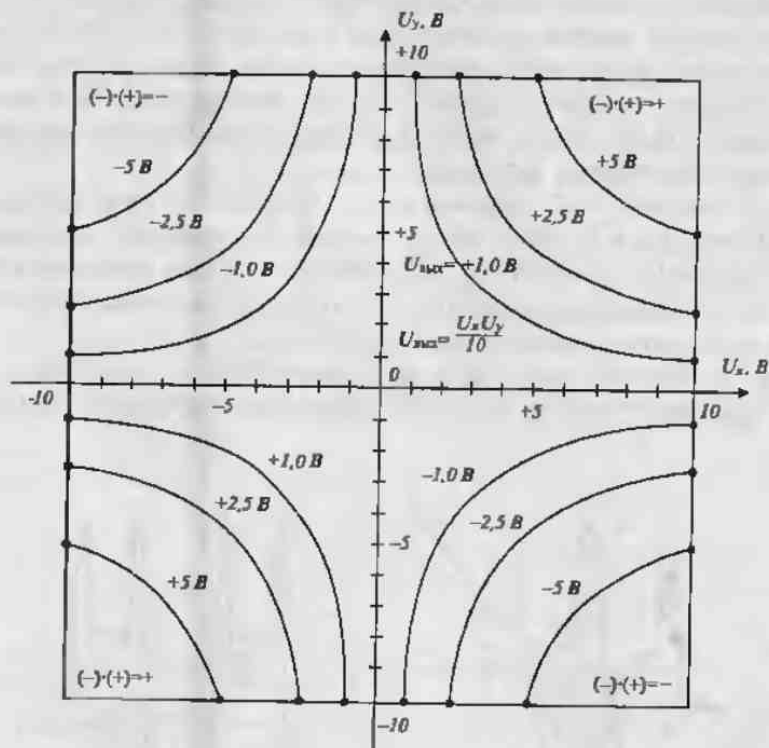


Рис. 32.4. Передаточные характеристики перемножителя напряжений

ционность нелинейного велика, то используются ВАХ для действующих (или средних) значений напряжения и тока. В последнем случае считают, что ВАХ инерционного элемента является нелинейной только для действующего (или среднего) тока, а для мгновенного значения тока — она линейна. При этом форма мгновенного значения тока в инерционном нелинейном элементе совпадает с формой мгновенного значения напряжения на нем.

К основным особенностям расчета нелинейных цепей относится вынужденный отказ от применения принципа наложения, поскольку реакция нелинейной цепи на сумму воздействий не равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности.

Иными словами, если $x = \sum x_k$, то $y \neq \sum y_k$, если y_k — реакция цепи на x_k . В связи с этим при анализе нелинейных цепей приходится учитывать сразу все составляющие воздействия x .

Графический расчет нелинейных резистивных цепей. Задача расчета реакции $y(t)$ нелинейной цепи по заданному воздействию $x(t)$ может быть ре-

шена графически при известной нелинейной характеристике $y = f(x)$. Погрешность этого расчета зависит от погрешности зависимости $y = f(x)$ и погрешностей графических построений, производимых при расчете. При графическом расчете можно использовать законы Кирхгофа, однако закон Ома неприменим (если его понимать как закон, который устанавливает прямую пропорциональность между напряжением и током).

Следует отметить, что реакция в цепи с нелинейным резистивным элементом зависит не только от ВАХ элемента, но и от характеристик генератора, к которому подключен нелинейный резистивный элемент. Особенно сильно это проявляется в нелинейных элементах с неоднозначными характеристиками (например, в туннельных диодах или динисторах).

В качестве примера рассмотрим цепь, состоящую из генератора и туннельного диода, приведенную на рис. 32.5. Если генератор имеет характеристики

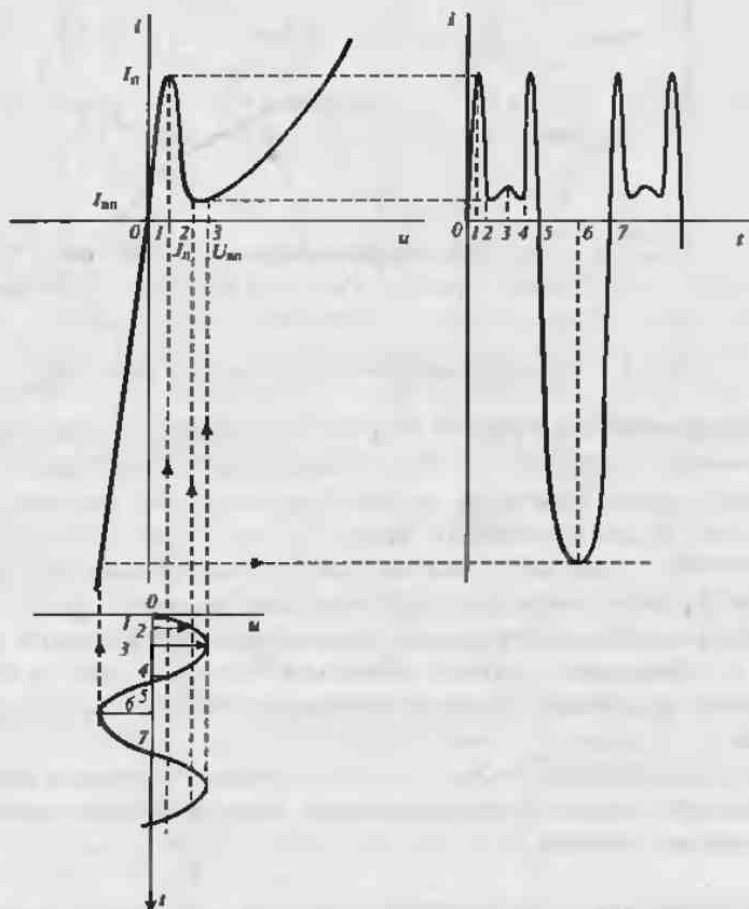


Рис. 32.5. Ток туннельного диода при воздействии гармонического напряжения

идеального источника гармонического напряжения, то путем простейших графических построений, выполненных на рис. 32.5, найдем ток в нелинейном элементе. Из этого рисунка видно, что форма реакции (тока) существенно отличается от гармонической и, следовательно, ее спектр содержит много высших гармоник. Однако, поскольку ВАХ туннельного диода при задании напряжения является однозначной, то кривая реакции является достаточно гладкой и не имеет разрывов непрерывности.

Совсем иная реакция получается, если тот же туннельный диод подключить к идеальному источнику тока. Для наглядности целесообразно перестроить ВАХ туннельного диода, взаимно заменив координатные оси.

Если ток туннельного диода, задаваемый генератором, будет гармоническим, то напряжение на нем (реакция) будет иметь разрывы непрерывности, как показано на рис. 32.6. Когда ток генератора станет равным пиковому значению

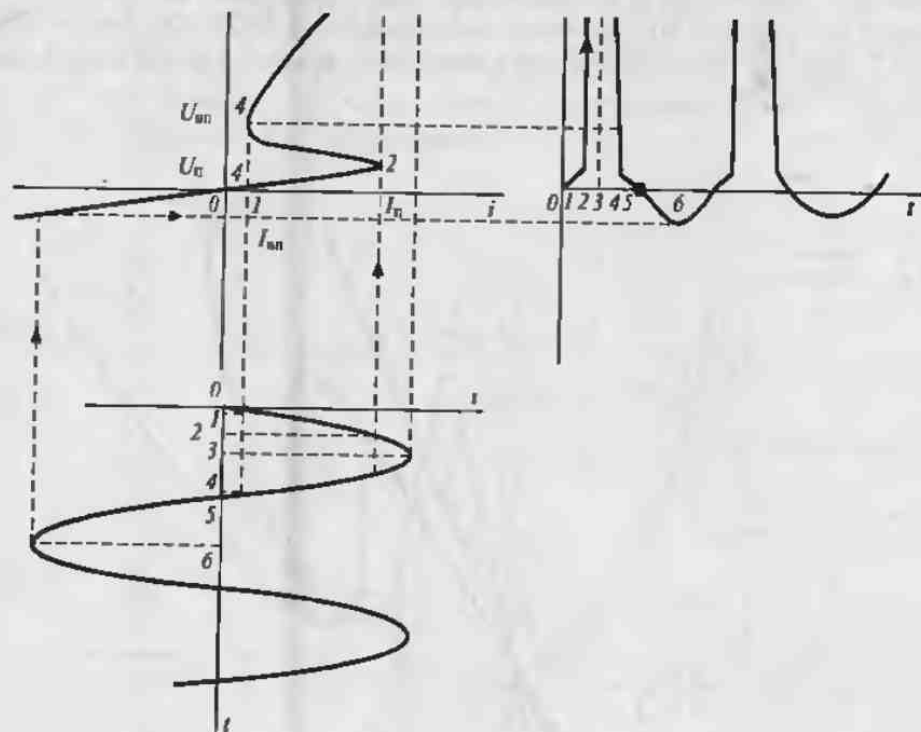
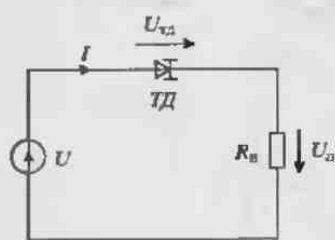


Рис. 32.6. Напряжение туннельного диода при воздействии гармонического тока

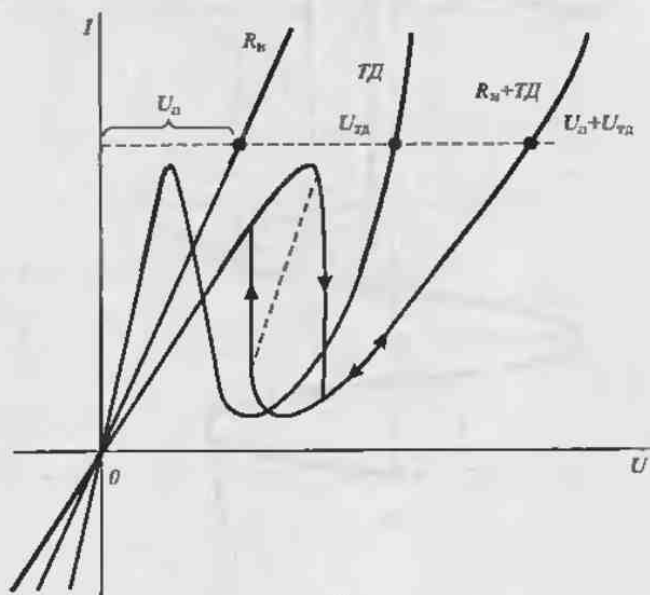
I_{Γ} (точка 2 на ВАХ), произойдет резкое увеличение напряжения и рабочая точка мгновенно переместится из точки 2 в точку 2'. Аналогичный скачок произойдет, когда ток генератора снизится до значения тока впадины $I_{\text{ВП}}$ (точка 4 на ВАХ). При этом токе напряжение скачком уменьшится от значения $U_{\text{ВП}}$ почти до нуля, а рабочая точка мгновенно переместится из точки 4 в точку 4'.

Если последовательно с туннельным диодом ТД включена нагрузка $R_{\text{н}}$ (например, линейный резистивный элемент), как показано на рис. 32.7, а, то сложением напряжений на элементах, согласно второму закону Кирхгофа, можно построить результирующую ВАХ, как показано на рис. 32.7, б. При этом построении для каждого значения тока в цепи выполняют графическое сложение напряжений на отдельных элементах. Заметим, что результирующая ВАХ содержит участки, на которых наблюдается скачкообразное изменение тока в цепи.

Аналогично можно построить результирующую ВАХ, если туннельный диод и нагрузка включены параллельно. При параллельном соединении напряжение на элементах одинаково, а токи пропорциональны их проводимостям. Поэтому для построения результирующей ВАХ необходимо при заданном напряжении складывать токи, пользуясь первым законом Кирхгофа. Результирующая ВАХ параллельного соединения туннельного диода ТД и нагрузки $R_{\text{н}}$ приведена на рис. 32.8.



а)



б)

Рис. 32.7. Схема включения туннельного диода с нагрузкой (а) и их результирующая ВАХ (б)

Если схема с параллельным соединением элементов питается от источника напряжения, то скачкообразных изменений тока в ней не происходит. В то же время при питании схемы от источника тока в ней могут происходить скачки напряжения.

Аналитический расчет нелинейных резистивных цепей. При аналитическом расчете нелинейных резистивных цепей в стационарном режиме пользуются их аналитическими описаниями ВАХ, некоторые из которых были приведены выше. Поскольку применение трансцендентных уравнений ВАХ затруднительно, очень часто их заменяют степенным многочленом вида

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n = \sum_{k=1}^n a_k u^k, \quad (32.12)$$

при этом число членов ряда ограничивают требуемой погрешностью расчета.

Другим широко применяемым способом расчета является замена нелинейной ВАХ ломаными прямыми линиями (кусочно-линейная аппроксимация). При этом график действительной нелинейной зависимости заменяется ломаными прямыми, число которых также выбирается из условия требуемой погрешности. Этот метод получил широкое распространение еще и потому, что он дополняется «сшиванием» решений на границах интервалов различных линейных участков. При этом конечные значения одного интервала приравниваются начальным значениям другого интервала.

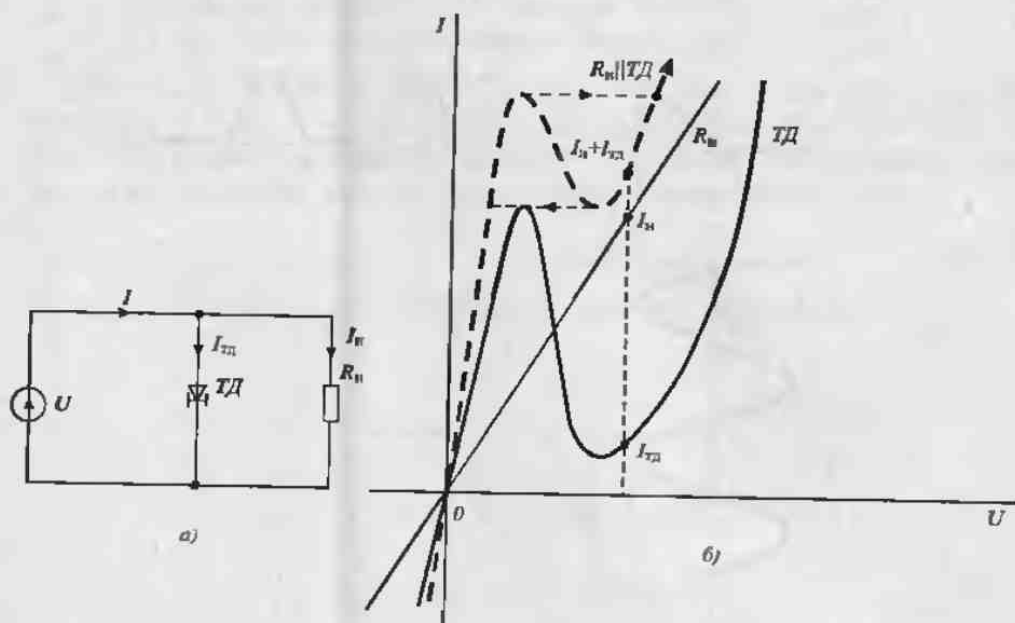


Рис. 32.8. Параллельное включение туннельного диода с нагрузкой (а) и их результирующая ВАХ

Так, например, кусочно-линейная аппроксимация очень часто используется при расчете выпрямителей на полупроводниковых диодах или параметрических стабилизаторов напряжения на стабилитронах.

Рассмотрим простейший выпрямитель на одном диоде, схема которого приведена на рис. 32.9, а. Идеализированная ВАХ диода, представленная двумя ломанными линиями и результирующая ВАХ последовательного соединения диода с нагрузкой R_H , приведены на рис. 32.9, б. Процесс преобразования гармонического напряжения в ток и форма тока нагрузки приведены на рис. 32.9, в.

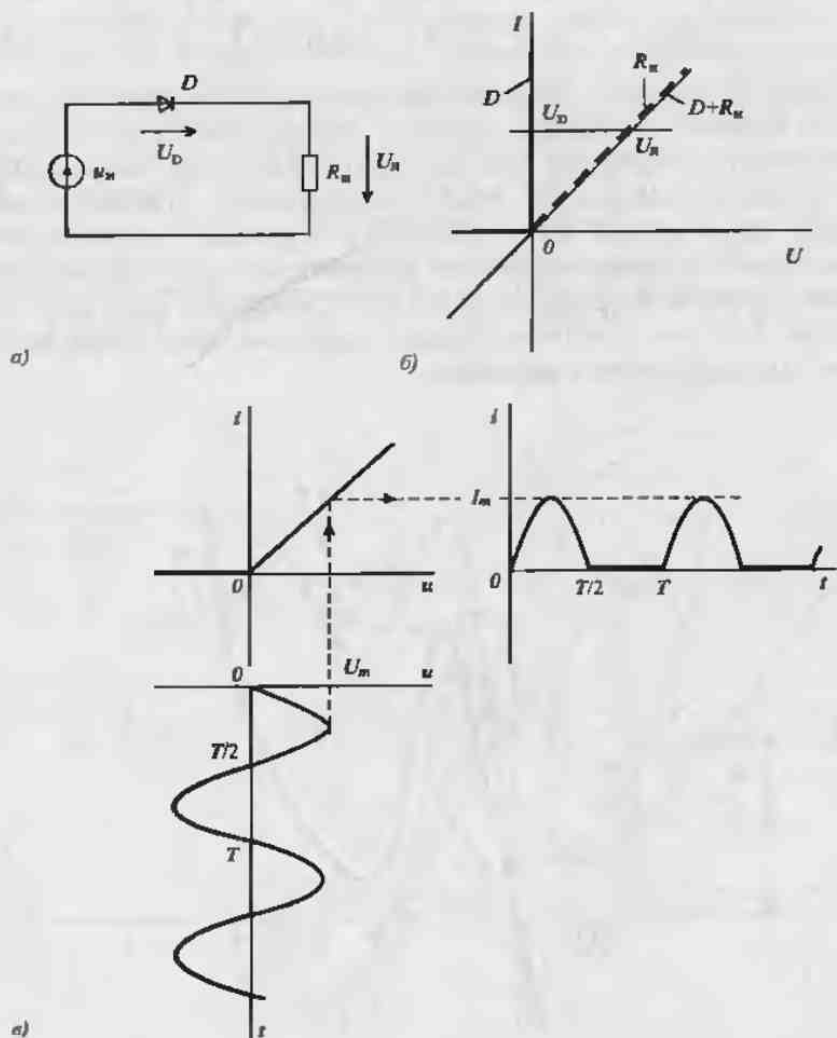


Рис. 32.9. Схема выпрямителя на диоде (а), кусочно-линейная аппроксимация ВАХ диода (б), и процесс выпрямления переменного напряжения (в)

В соответствии с принятой аппроксимацией постоянная составляющая тока нагрузки определяется по формуле

$$I_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = I_m / \pi. \quad (32.13)$$

Спектр переменной составляющей определяется по формуле

$$I_{nk} = \frac{I_m}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos kx dx = \begin{cases} I_m / 2 & \text{при } k=1, \\ \frac{2}{\pi} I_m \frac{1}{k^2-1} & \text{при четном } k, \\ 0 & \text{при нечетном } k. \end{cases} \quad (32.14)$$

Таким образом, в спектре выпрямленного тока имеются:

- первая гармоника с амплитудой $I_m/2$;
- вторая гармоника с амплитудой $2I_m/(3\pi)$;
- четные гармоники с амплитудами $2I_m/[\pi(k^2-1)]$,
- амплитуды нечетных гармоник равны нулю.

Диодные выпрямители используются не только для выпрямления переменного тока, но и для демодуляции амплитудно-модулированных (АМ) сигналов. Простейшая схема демодулятора приведена на рис. 32.10, а. В этой схеме используется диод, ВАХ которого аппроксимируется степенным рядом

$$i = a_1 u + a_2 u^2, \quad (32.15)$$

где $u = U_m(t) \cos \omega_0 t$ — амплитудно-модулированное напряжение.

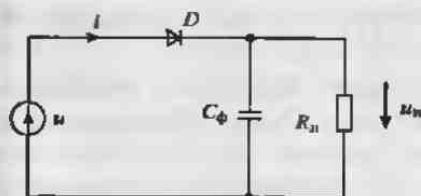


Рис. 32.10. Схема демодулятора сигналов на диоде

При подстановке значения i в формулу (32.15) находим:

$$\begin{aligned} i &= a_1 U_m(t) \cos \omega_0 t + a_2 U_m^2(t) \cos^2 \omega_0 t = \\ &= a_1 U_m(t) \cos \omega_0 t + a_2 \frac{U_m^2(t)}{2} (1 + \cos 2\omega_0 t) = \\ &= a_1 U_m \cos \omega_0 t + a_2 \frac{U_m^2(t)}{2} \cos 2\omega_0 t + a_2 \frac{U_m^2(t)}{2}. \end{aligned} \quad (32.16)$$

Фильтр на емкости C_{ω} , установленный на выходе демодулятора, обеспечивает подавление сигналов с частотами ω_0 и $2\omega_0$, поэтому напряжение на нагрузке зависит только от амплитуды модулированного колебания

$$u_{\Pi} = a_2 \frac{U_m^2(t)}{2} R_{\Pi}, \quad (32.17)$$

что и обеспечивает демодуляцию АМ сигнала.

Этот пример, так же как и предыдущий, показывает, что нелинейные цепи можно использовать для преобразования спектра входного сигнала. В линейных цепях подобного рода преобразования не происходят, поэтому нелинейные цепи обеспечивают такие важные для практики преобразования, как умножение и деление частоты сигналов, модуляция и детектирование сигналов, генерирование колебаний и др.

Так, например, если на оба входа перемножителя напряжений с характеристикой (32.11) подать один и тот же сигнал

$$u_x = u_y = U_m \cos \omega_0 t,$$

то выходное напряжение перемножителя будет содержать постоянную составляющую и сигнал удвоенной частоты:

$$u_{\text{вых}} = KU_m^2 \cos^2 \omega_0 t = KU_m^2 (1 + \cos 2\omega_0 t).$$

Если в этом сигнале отфильтровать постоянную составляющую, то получится удвоитель частоты сигнала.

Существование решения для цепей с нелинейными резистивными элементами. Выполненное рассмотрение электрических цепей с нелинейными резистивными элементами показало, что такие цепи описываются нелинейными алгебраическими или трансцендентными уравнениями. Если на входе такой цепи действует источник периодического напряжения или тока, то токи и напряжения реакций имеют ту же частоту, что и воздействие, но иную форму, что сказывается на изменении спектрального состава реакции.

Поскольку отыскание решения в виде функции времени в общем случае затруднительно, то обычно находят решение для ряда фиксированных моментов времени t_k . Для этих моментов времени токи и напряжения цепи также будут фиксированными, что эквивалентно замене источников переменных сигналов источниками постоянных сигналов, напряжения и токи которых соответствуют мгновенным значениям при $t = t_k$.

В результате при расчете нелинейной цепи получаем систему уравнений для выбранных моментов времени $t = t_k$, составленную для эквивалентных цепей постоянного напряжения. Решения этой системы уравнений будут постоянными величинами, не зависящими от времени. Решения для моментов времени $t = t_k$ можно использовать для построения графиков искомых функций.

Основная особенность такого подхода состоит в том, что полученная система частных уравнений может иметь не единственное решение или может его вообще не иметь. Так, например, рассмотренные выше примеры с туннельными диодами могут иметь несколько решений. Поэтому при анализе нелинейных резистивных цепей приходится рассматривать проблему многозначности получаемых решений.

Однозначные решения существуют только для квазилинейных ВАХ, которые в каждой точке имеют конечный положительный наклон. К таким элементам относятся полупроводниковые диоды, стабилитроны и другие элементы, не имеющие участков отрицательного сопротивления или проводимости. Проблема однозначности решения еще больше усложняется при использовании управляемых нелинейных элементов с участками отрицательных сопротивлений.

Лекция 33. Электрические цепи с нелинейными реактивными элементами

Нелинейные реактивные элементы. К нелинейным реактивным элементам относятся нелинейные индуктивности и емкости. *Нелинейные индуктивности* представляют собой катушки индуктивности с ферромагнитными сердечниками.

Нелинейность таких катушек обусловлена явлением насыщения ферромагнитного сердечника. Вебер-амперная характеристика (ВБАХ) нелинейной катушки обычно аппроксимируется степенным многочленом вида

$$i(\psi) = a\psi + b\psi^3, \quad (33.1)$$

где a и b — некоторые постоянные коэффициенты.

Графическая зависимость вебер-амперной характеристики нелинейной катушки индуктивности без учета потерь на ее перемагничивание приведена на рис. 33.1, а.

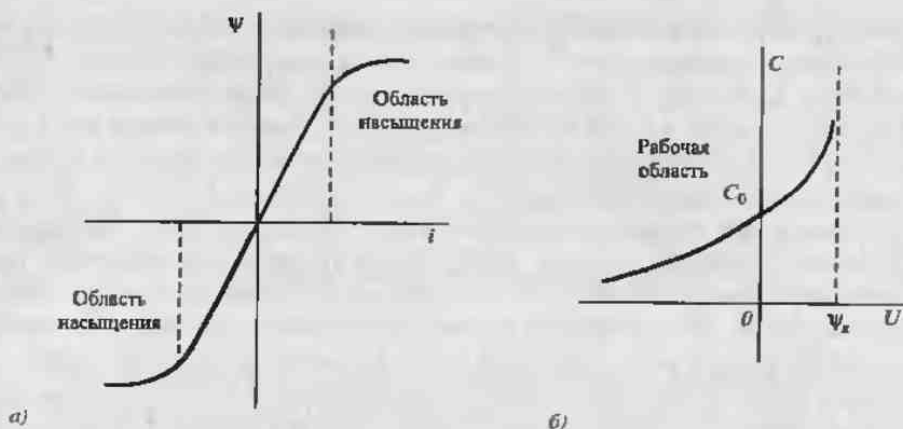


Рис. 33.1 Вебер-амперная характеристика катушки с сердечником (а) и вольт-фарадная характеристика варикапа (б)

Нелинейные емкости бывают двух типов: барьерные емкости полупроводниковых p - n -переходов (варикапы) и емкости конденсаторов с сегнетоэлектриками (вариконды). Емкости варикапов определяются по эмпирической формуле

$$C = C_0(1 - U/U_k)^{-1/2}, \quad (33.2)$$

где C_0 — начальная емкость варикапа при напряжении $U = 0$;

U_k — контактная разность потенциалов полупроводниковых материалов, образующих p - n -переход.

Реальная зависимость емкости варикапа от приложенного напряжения изображена на рис. 33.1, б. Эта емкость резко увеличивается, когда напряжение на варикапе приближается к значению контактной разности потенциалов.

Нелинейность емкости варикондов обусловлена зависимостью диэлектрической проницаемости сегнетоэлектриков от напряженности электрического поля. Кулонвольтная характеристика вариконда обычно аппроксимируется степенным многочленом, аналогичным полиному нелинейной индуктивности

$$u(q) = tq + nq^n, \quad (33.3)$$

где m и n — некоторые постоянные коэффициенты.

Характеристики нелинейной индуктивности. В лекции 8 отмечалось, что индуктивность катушки с ферромагнитным сердечником имеет нелинейную зависимость от намагничивающего магнитного потока. Там же отмечалось, что вебер-амперную характеристику нелинейной катушки можно описать двумя параметрами — статической и дифференциальной индуктивностями.

Однако, модель нелинейной катушки усложняется, если учесть неоднозначность кривой намагничивания и наличие потерь в сердечнике.

Кривая намагничивания нелинейной катушки определяется петлей магнитного гистерезиса ее сердечника. В стационарном режиме намагничивания на низкой частоте она имеет вид, показанный на рис. 33.2, а. Таким образом, нелинейный индуктивный элемент характеризуется вебер-амперной характеристикой (ВБАХ) $\psi = f(i)$, которая устанавливает связь магнитного потокосцепления $\psi = \omega\Phi$ и тока i в обмотке катушки.

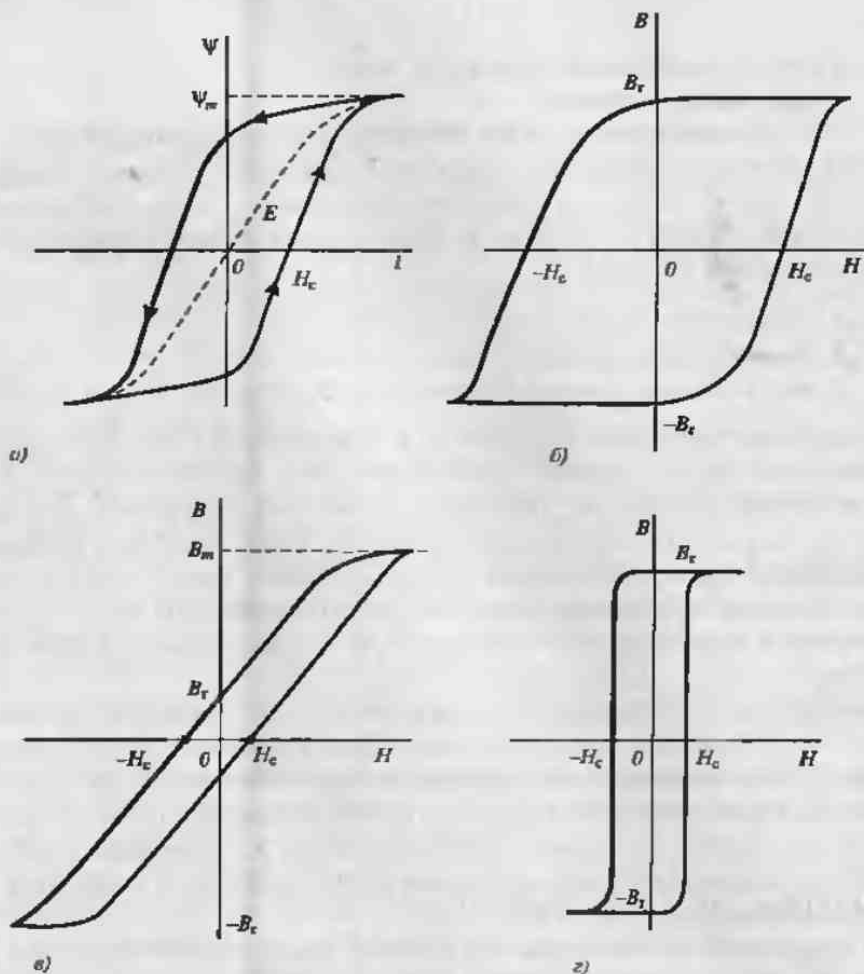


Рис. 33.2 Виды кривых намагничивания: типовая (а), широкая (б), с малыми потерями (в), прямоугольная (г)

Заметим, что кривая намагничивания катушки может быть построена в других координатах $B = f(H)$, если учесть, что магнитное потокоцепление Ψ пропорционально индукции B

$$\Psi = w \oint_S B dS = wSB,$$

а напряженность магнитного поля H пропорциональна току i в обмотке катушки

ки $wi = \int_l H dl = lH$, откуда

$$i = l H/w,$$

где: l — длина силовой линии магнитного поля;

w — число витков катушки;

S — площадь поверхности, через которую проходит магнитный поток.

Кривая магнитного гистерезиса сердечника нелинейной катушки имеет ряд характерных точек, которые позволяют определить степень нелинейности ВБАХ и потери энергии в катушке. К таким точкам кривой намагничивания сердечника катушки относят:

- остаточную индукцию B_r ;
- коэрцитивную силу H_c ;
- максимальную индукцию насыщения B_m .

По значениям остаточной индукции B_r и коэрцитивной силы H_c магнитные материалы делят на две группы: магнитно-мягкие и магнитно-твердые. Магнитные материалы с большими значениями остаточной индукции B_r и коэрцитивной силы H_m называются *магнитно-твердыми*. Такие магнитные материалы характеризуются большой площадью петли гистерезиса (рис. 33.2, б) и значительными потерями при перемагничивании. Коэрцитивная сила магнитно-твердых материалов составляет $H_c = 10^3 \dots 10^4$ А/м, а остаточная индукция $B_r = 0,8 \dots 1,5$ Тл.

Магнитные материалы с малыми значениями B_r и H_c называют *магнитно-мягкими*. Такие магнитные материалы характеризуются узкой петлей гистерезиса (рис. 33.2, в), малыми потерями при перемагничивании ($1 \dots 10^3$ Дж/м³) и применяются для изготовления магнитопроводов дросселей, трансформаторов, электрических машин, электромагнитных реле и др. Коэрцитивная сила магнитно-мягких материалов лежит в пределах от 0,8 до 8 А/м, а остаточная индукция не превышает 0,1...0,3 Тл.

По технологии изготовления и значению максимальной индукции насыщения B_m магнитные материалы делят на электротехнические стали, сплавы и магнитодиэлектрики. Эта характеристика, особенно важная для магнитно-мягких материалов из электротехнических сталей и сплавов, име-

ет значение 2...3 Тл. Для магнитодиэлектриков (ферритов) максимальная индукция насыщения составляет 0,3...0,5 Тл, т. е. в несколько раз меньше, чем у стали.

Кроме этого, при изготовлении нелинейных индуктивностей устройств вычислительной и измерительной техники широко применяются магнитные материалы с прямоугольной петлей гистерезиса (ППГ) (рис. 31.2, з). У таких материалов при достаточно низкой коэрцитивной силе ($H_c < 1$ А/м) имеется достаточно высокая остаточная индукция ($B_r = 0,5...0,8$ Тл).

Мощность потерь на перемагничивание единичного объема материала сердечника нелинейной катушки пропорциональна площади петли гистерезиса и частоте переменного тока

$$P = f \int id\psi, \quad (33.4)$$

где f — частота переменного тока.

Если потери в катушке малы, что имеет место при использовании сердечников из магнитно-мягких материалов, то вместо петли гистерезиса можно использовать основную кривую намагничивания, изображенную на рис. 33.2, а штриховой линией. Эта кривая представляет собой геометрическое место вершин симметричных петель гистерезиса и характеризуется однозначностью реакции. При использовании основной кривой намагничивания потери на намагничивание не учитываются.

Для упрощения анализа цепей с нелинейной индуктивностью реальную петлю гистерезиса часто заменяют эквивалентным по площади эллипсом. Такая замена имеет теоретическое обоснование, и обычно называется *методом эквивалентной гармонической линеаризации*.

В соответствии с этим методом нелинейная катушка индуктивности заменяется эквивалентной линейной катушкой, ток и напряжение которой имеют гармоническую форму. При этом потери на намагничивание в реальной катушке оказываются равными потерям в эквивалентной катушке, так как равны площади реальной петли гистерезиса и эквивалентного эллипса.

Режимы работы катушки с ферромагнитным сердечником. Катушка с ферромагнитным сердечником может работать в двух основных режимах: вынужденного и свободного намагничивания.

В режиме свободного намагничивания катушка подключается к генератору задающего синусоидального напряжения, а ток в катушке определяется ее кривой намагничивания. Аналогично, в режиме вынужденного намагничивания в катушке устанавливается синусоидальный ток, а напряжение на катушке зависит от ее кривой намагничивания. Рассмотрим эти режимы более подробно.

Режим свободного намагничивания. В режиме свободного намагничивания катушка подключается к источнику гармонического напряжения (рис. 33.3, а) $u(t) = U_m \cos \omega t$. Магнитный поток в сердечнике катушки

$$\psi = \int u(t) dt = \frac{U_m}{\omega} \sin \omega t = \psi_m \sin \omega t, \quad (33.5)$$

где $\psi_m = U_m/\omega$ — амплитуда синусоидального магнитного потока.

Ток в катушке имеет несинусоидальную форму, определяемую характеристикой намагничивания катушки с сердечником. На рис. 33.3, б показаны кривые напряжения, тока и магнитного потока в катушке с сердечником при *отсутствии в ней потерь*. Анализируя форму тока в катушке в режиме свободного намагничивания, можно сделать следующие выводы:

- форма тока отличается от синусоидальной,
- степень отличия формы тока от синусоидальной определяется кривой намагничивания катушки с сердечником,
- ток в катушке запаздывает по отношению к приложенному напряжению,
- запаздывание тока зависит от ширины кривой намагничивания (т. е. от потерь в катушке) и при увеличении ширины кривой намагничивания запаздывание уменьшается,
- при использовании вместо петли гистерезиса основной кривой намагничивания запаздывание тока увеличивается до значения $T/4$ (или $\pi/2$),
- форма тока в нелинейной катушке без потерь симметричная и содержит только нечетные гармоники.

При использовании степенной аппроксимации ВБАХ (33.1) ток в нелинейной катушке можно определить по формуле

$$\begin{aligned} i(t) &= a\psi + b\psi^3 = a\psi_m \sin \omega t + b\psi_m^3 \left(\frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t \right) = \\ &= \left(a\psi_m + \frac{3b\psi_m^3}{4} \right) \sin \omega t - \frac{b\psi_m^3}{4} \sin 3\omega t = \\ &= I_{m1} \sin \omega t - I_{m3} \sin 3\omega t, \end{aligned} \quad (33.6)$$

где $I_{m1} = a\psi_m + \frac{3b\psi_m^3}{4}$ — амплитуда первой гармоники тока,

$I_{m3} = b\psi_m^3/4$ — амплитуда третьей гармоники тока.

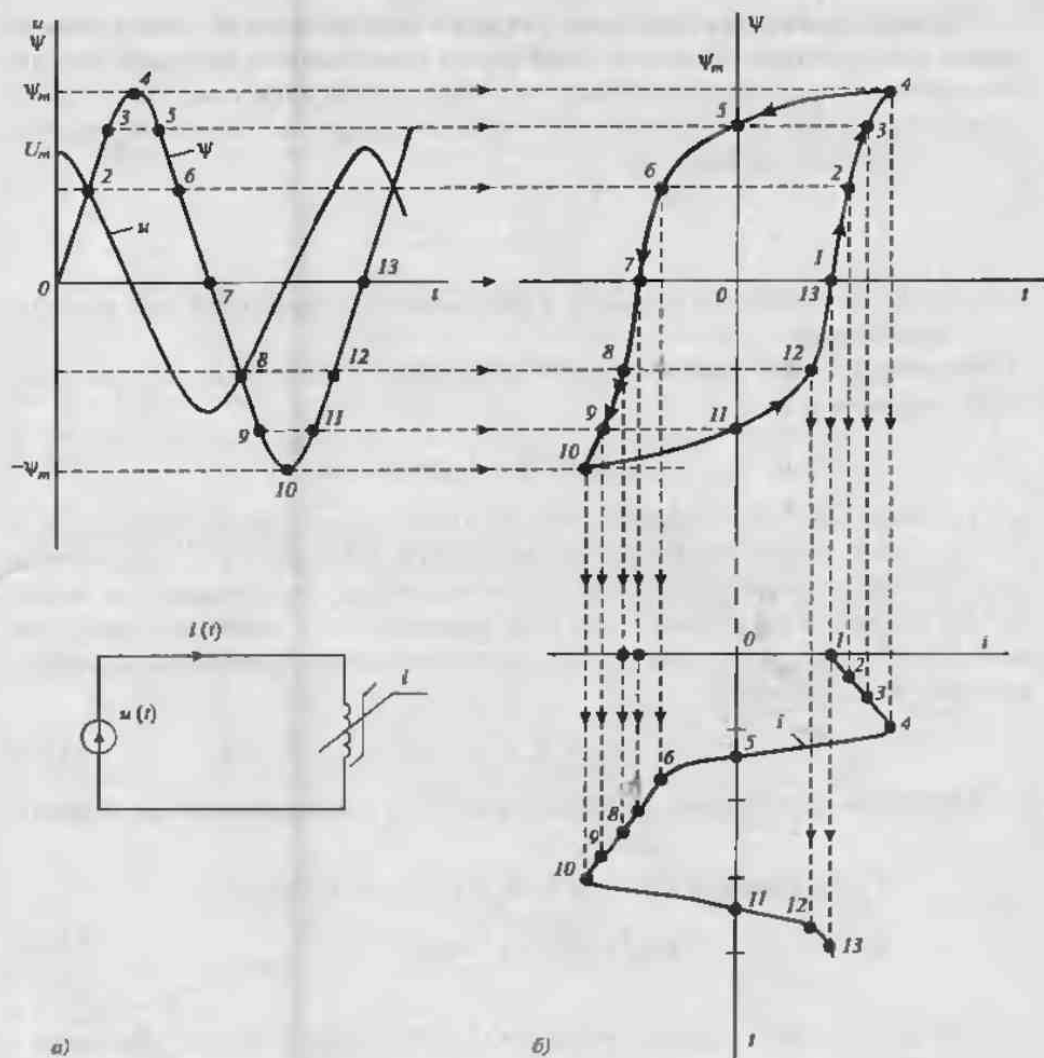


Рис. 33.3. Включение нелинейной катушки в режим свободного намагничивания (а) и графики напряжения и тока в ней (б)

Таким образом, при свободном намагничивании нелинейной катушки индуктивности без потерь ток в ней имеет следующие особенности:

- форма тока несинусоидальная,
- в составе тока имеется третья гармоника, амплитуда которой зависит от амплитуды напряжения $U_m = \Psi_m \omega$,
- напряжение и ток первой гармоники сдвинуты на угол $\pi/2$.

Гармоническая линеаризация катушки индуктивности. При гармонической линеаризации катушки индуктивности с сердечником полагают, что при синусоидальном изменении магнитного потока ток катушки также имеет синусоидальную форму, т. е. считают, что в общем случае комплексная амплитуда тока определяется выражением

$$\dot{I}_m = I_{ma} + jI_{mp} \quad (33.7)$$

где I_{ma} и I_{mp} — амплитуды активной и реактивной составляющих тока катушки с сердечником.

В соответствии с формулой (33.7) мгновенное значение тока катушки можно представить в виде

$$i = I_{ma} \cos \omega t + I_{mp} \sin \omega t, \quad (33.8)$$

что соответствует параллельной схеме замещения, приведенной на рис. 33.4, а.

Из схемы замещения видно, что нелинейная катушка при наличии потерь в сердечнике эквивалентна параллельному включению индуктивной b и активной g проводимостей. Поскольку к этим проводимостям приложено одно и то же напряжение U_m , то амплитуды составляющих полного тока катушки можно определить по формулам

$$I_{ma} = U_m g, \quad I_{mp} = U_m b. \quad (33.9)$$

Подставив амплитудные значения токов (33.9) в уравнение (33.8), получим

$$\begin{aligned} i &= U_m (g \cos \omega t + b \sin \omega t) = \psi_m \omega (g \cos \omega t + b \sin \omega t) = \\ &= \omega (g \sqrt{\psi_m^2 - \psi^2} + b \psi). \end{aligned} \quad (33.10)$$

При возведении в квадрат уравнения (33.10) можно получить уравнение

$$i^2 + \omega^2 (g^2 + b^2) \psi^2 - 2b\omega \psi i - g^2 \omega^2 \psi_m^2 = 0, \quad (33.11)$$

которое соответствует уравнению эллипса в координатах i, ψ .

Из этого следует, что при гармонической линеаризации реальная петля гистерезиса заменяется эквивалентным эллипсом.

Если потери в катушке малы, то можно положить, что $g = 0$, и уравнение эллипса (33.11) превращается в уравнение прямой линии

$$i = b\omega \psi. \quad (33.12)$$

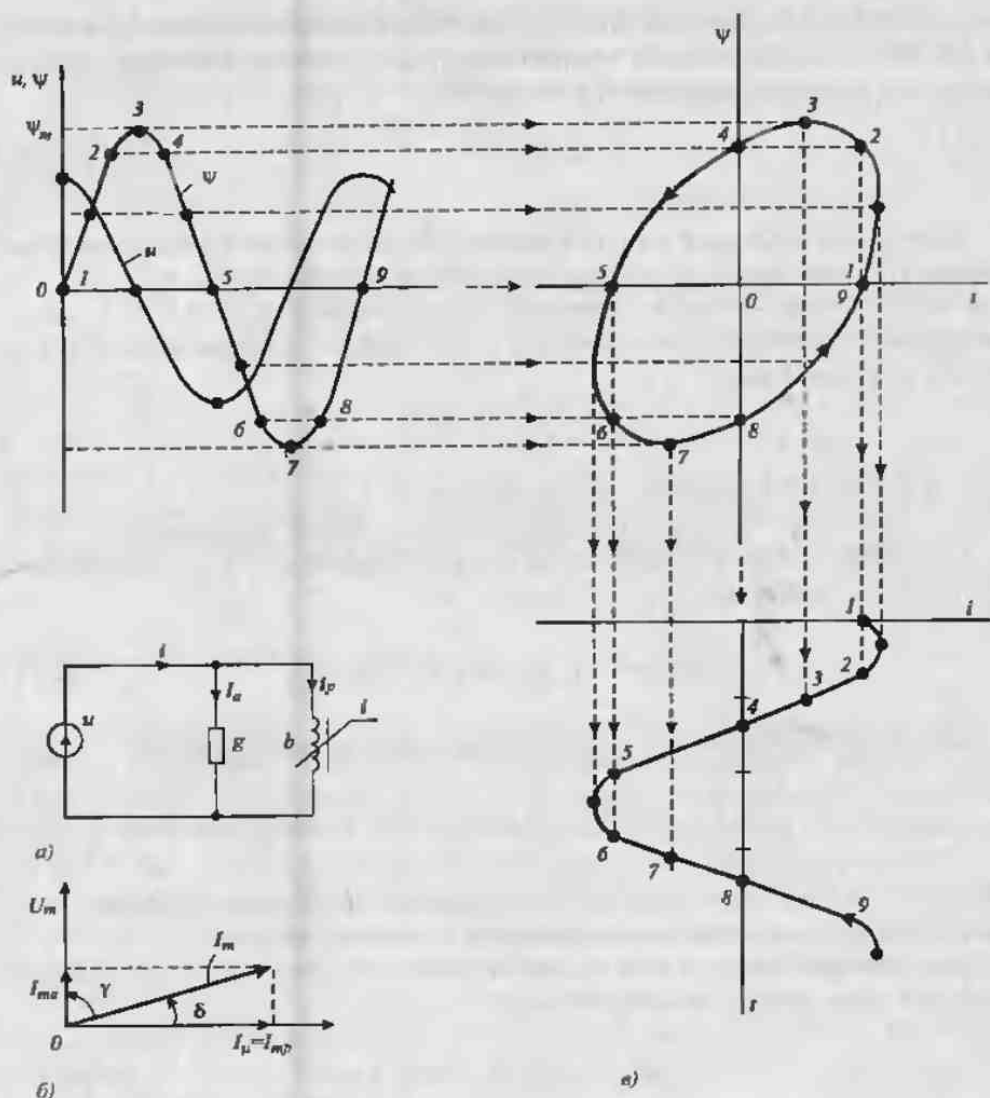


Рис. 33.4. Схема линейризованной катушки (а), кривые напряжения и тока в ней (б), векторная диаграмма (в)

Графики кривых намагничивания при гармонической линеаризации приведены на рис. 33.4, б. Из этих графиков следует, что наличие потерь в нелинейной катушке приводит к сдвигу фаз φ между напряжением и током, при этом $\operatorname{tg} \varphi = g/b$.

По значениям проводимостей g и b можно построить векторную диаграмму линеаризованной катушки с сердечником, которая приведена на рис. 33.4, в. Реактивная составляющая тока $I_p = I_\mu$ нелинейной катушки называется намаг-

ничающим током, который совпадает по фазе с магнитным потоком сцеплением ψ_m . Угол между векторами полного тока I_m и магнитного потока ψ_m называется углом потерь и определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \delta = I_a / I_p. \quad (33.12a)$$

Режим вынужденного намагничивания. В режиме вынужденного намагничивания полагают, что ток в катушке имеет гармоническую форму, что возможно, если катушка подключена к генератору гармонического тока $i(t) = I_m \cos \omega t$. Для определения напряжения на катушке воспользуемся уравнением ВБАХ (33.1), которое запишем в виде

$$\psi(i) = ci - di^3 = L(i - ki^3), \quad (33.13)$$

где c , d и k — коэффициенты аппроксимации ВБАХ;

L — эквивалентная индуктивность линеаризованной катушки.

Подставив значение гармонического тока в уравнение (33.13), найдем магнитный поток в катушке

$$\psi(i) = L(I_m \cos \omega t - kI_m^3 \cos^3 \omega t). \quad (33.14)$$

При этом напряжение u_L на нелинейной катушке имеет значение

$$u_L = d\psi / dt = \omega LI_m \left[(1 - 3kI_m^2 / 4) \cos(\omega t + 90^\circ) + (3kI_m^2 / 4) \sin 3\omega t \right],$$

откуда следует, что напряжение на катушке несинусоидальное и содержит третью гармонику, амплитуда которой зависит от амплитуды тока I_m .

При линеаризации катушки индуктивности учтем только первую гармонику напряжения, амплитуда которой равна

$$U_{m1} = \omega LI_m (1 - 3kI_m^2 / 4). \quad (33.15)$$

Из уравнения (33.15) следует, что эквивалентное индуктивное сопротивление катушки имеет значение

$$x_L = U_{m1} / I_m = \omega L (1 - 3kI_m^2 / 4). \quad (33.16)$$

Потери в нелинейной катушке. Потери в катушке с ферромагнитным сердечником состоят из следующих составляющих:

□ потерь P_r , обусловленных премомагничиванием сердечника (потери на гистерезис);

- потеря $P_{вт}$ обусловленных вихревыми токами в сердечнике;
- потеря P_m обусловленных активным сопротивлением обмотки.

Общие потери в сердечнике называются потерями в стали

$$P_{ст} = P_i + P_{вт} \quad (33.17)$$

Эти потери можно определить с помощью эмпирических формул

$$P_i = k_i f B_m^n, \quad P_{вт} = k_{вт} f^2 B_m^n \quad (33.18)$$

где k_i и $k_{вт}$ — коэффициенты потерь на гистерезис и вихревые токи, соответственно;

$n = 1,6 \dots 2$ — показатель, зависящий от значения B_m .

Из формул (33.18) следует, что потери на вихревые токи существенно увеличиваются с ростом частоты тока. Эти потери приводят к расширению *динамической петли гистерезиса* и преобразованию ее в эллипс. Потери в обмотке катушки пропорциональны квадрату тока и определяются по формуле

$$P_m = I^2 R_{об} \quad (33.19)$$

где $R_{об}$ — сопротивление обмотки.

Нелинейная емкость в цепи переменного тока. Как указывалось выше, в качестве нелинейных емкостей наиболее широко используются полупроводниковые емкости — варикапы и емкости с сегнетоэлектриками — вариконды. При рассмотрении цепей с варикондами можно пользоваться формальной аналогией между ферромагнитными и сегнетоэлектрическими материалами.

Сегнетоэлектрические материалы характеризуются петлей диэлектрического гистерезиса, площадь которой пропорциональна потерям при поляризации диэлектрика. Наличие потерь в сегнетоэлектрике приводит к появлению сдвига фаз между напряжением и током в цепи с варикондом. С ростом частоты начинают сказываться инерционность сегнетоэлектриков и петля гистерезиса приближается к эллипсу. Кривая поляризации (кулонвольтная характеристика) вариконда приведена на рис. 33.5, а.

Таким образом, нелинейные емкости с сегнетоэлектриками характеризуются кулонвольтной характеристикой ($Q \sim U_c$) $q = f(u_c)$, которая устанавливает зависимость заряда q от напряжения u_c на емкости (рис. 33.5, б). Эта кривая может быть построена в координатах $D = f(E)$, если учесть, что заряд q пропорционален индукции D электрического поля

$$q = \oint_S D ds = DS,$$

а напряженность электрического поля пропорциональна напряжению u_C

$$u_C = \int_l E dl = El,$$

где l — длина силовой линии вектора электрического поля;

S — площадь поверхности, через которую проходит поток вектора D электрического поля.

Цепи с варикондами могут работать в двух режимах: свободной и вынужденной поляризации. В режиме свободной поляризации ток нелинейного конденсатора изменяется по гармоническому закону $i = I_m \cos \omega t$, при этом заряд емкости

$$q = \int i(t) dt = \frac{I_m}{\omega} \sin \omega t = Q_m \sin \omega t, \quad (33.20)$$

где $Q_m = I_m/\omega$ — амплитуда переменного заряда емкости.

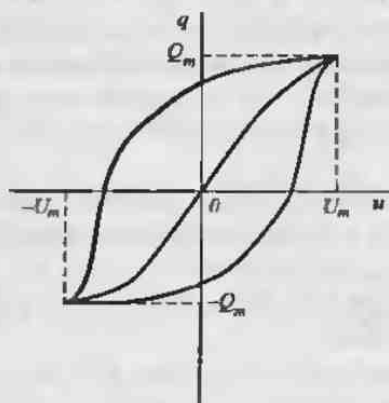
По отношению к напряжению на конденсаторе в режиме свободной поляризации можно сделать те же выводы, которые были сделаны для тока в нелинейной индуктивности. Если использовать степенную аппроксимацию нелинейной зависимости $u(q)$ (33.3), то напряжение на емкости будет иметь значение

$$u_C = U_{m1} \sin \omega t - U_{m3} \sin 3\omega t, \quad (33.21)$$

где $U_{m1} = mQ_m + (3nQ_m^3)/4$ — амплитуда первой гармоники напряжения на емкости,

$U_{m3} = nQ_m^3/4$ — амплитуда третьей гармоники напряжения.

а)



б)



Рис. 33.5. Кулон-вольтовая характеристика вариконда (а) и его схема замещения (б)

Таким образом, в режиме свободной поляризации нелинейной емкости без потерь напряжение u_C имеет следующие особенности:

- в составе напряжения присутствует третья гармоника, амплитуда которой U_{m3} зависит от амплитуды тока I_m в емкости;
- напряжение первой гармоники отстает от тока на угол $\pi/2$.

Если использовать эквивалентную линеаризацию емкости, то напряжение на емкости с учетом потерь в диэлектрике можно представить в виде

$$\dot{U}_{m3} = U_{mi} + jU_{mr}, \quad (33.22)$$

где U_{mi} и U_{mr} — амплитуды активного и реактивного напряжения на емкости.

Мгновенное напряжение на емкости в соответствии с формулой (33.22) можно представить в виде

$$u_1(t) = U_{mr} \cos \omega t + U_{mi} \sin \omega t,$$

что соответствует последовательной схеме замещения, приведенной на рис. 33.5, б.

Из этой схемы замещения видно, что нелинейная емкость при наличии потерь в диэлектрике эквивалентна последовательному включению активного сопротивления r и реактивного сопротивления x . Наличие потерь в диэлектрике приводит к сдвигу фаз φ между током и напряжением, при этом $\operatorname{tg} \varphi = r/x$.

В отличие от варикондов полупроводниковые емкости (варикапы) практически безынерционные элементы. Эти элементы могут работать на частотах выше 1 ГГц с достаточно малыми потерями.

Эквивалентная схема варикапа приведена на рис. 33.6. Она содержит барьерную емкость C_n варикапа, зависящую от приложенного напряжения по уравнению (33.2), шунтирующее сопротивление $R_{ш}$ p - n -перехода и последовательное сопротивление потерь R_p .

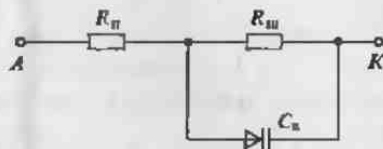


Рис. 33.6. Схема замещения варикапа

При малом переменном напряжении на варикапе можно пользоваться его линейной моделью, для которой комплексное сопротивление имеет значение

$$Z_n = R_n - jX_n = R_n + \frac{R_{\text{ш}}}{1 + (\omega C_0 R_{\text{ш}})^2} - j \frac{\omega C_0 R_{\text{ш}}^2}{1 + (\omega C_0 R_{\text{ш}})^2}. \quad (33.23)$$

Параметры этой модели обычно приводят в справочной литературе.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

К разделу 1

- 1.1. Какие электротехнические устройства можно анализировать методами теории цепей?
- 1.2. Какие виды токов могут протекать в электрических цепях?
- 1.3. Чем отличается электропроводность проводников от электропроводности диэлектриков?
- 1.4. Чем отличается электропроводность проводников от электропроводности полупроводников?
- 1.5. Могут ли протекать токи в пустоте?
- 1.6. Какой принцип электромагнетизма утверждается в первом законе Кирхгофа?
- 1.7. Какой принцип электромагнетизма утверждается во втором законе Кирхгофа?
- 1.8. Чем отличается ток проводимости от тока смещения?
- 1.9. Какие свойства электромагнитных процессов характеризуются электрической емкостью?
- 1.10. Какие свойства электромагнитных процессов характеризуются индуктивностью?

К разделу 2

- 2.1. Какими свойствами отличаются электрические сигналы от воздействий?
- 2.2. Почему при анализе свойств электрических цепей чаще всего используются гармонические колебания?
- 2.3. Какими свойствами характеризуется комплексная амплитуда?
- 2.4. Почему для описания периодических негармонических колебаний используется ряд Фурье?
- 2.5. Какими особенностями характеризуются действующие значения напряжения и тока?

- 2.6. Как определяется действующее значение несинусоидального периодического тока?
- 2.7. Как определяется средняя мощность несинусоидального периодического тока?
- 2.8. С какой целью для описания непериодических колебаний используется преобразование Лапласа?
- 2.9. Опишите последовательность действий при анализе цепей с помощью преобразования Лапласа.
- 2.10. Каким образом по известной операторной функции находят ее мгновенное значение?

К разделу 3

- 3.1. Какие модели элементов электрических цепей используются в теории цепей?
- 3.2. Какими моделями пользуются при описании свойств идеальных и реальных источников тока?
- 3.3. Какими моделями пользуются при описании свойств идеальных и реальных источников напряжения?
- 3.4. Чем отличаются линейные и нелинейные резистивные элементы?
- 3.5. Какие элементы называются параметрическими?
- 3.6. Какими свойствами обладают активные элементы?
- 3.7. Какими коэффициентами характеризуют индуктивно связанные цепи?
- 3.8. Какие режимы работы четырехполюсника используют при определении его параметров?
- 3.9. Какими свойствами обладают конверторы сопротивлений?
- 3.10. Какими свойствами обладают инверторы сопротивлений?

К разделу 4

- 4.1. Какой режим работы электрической цепи называют стационарным?
- 4.2. Опишите порядок расчета электрической цепи по мгновенным значениям напряжения и тока.
- 4.3. Какие схемы электрической цепи переменного тока называют каноническими?
- 4.4. Каким образом производится переход от последовательной канонической схемы к параллельной?
- 4.5. Как можно перейти от параллельной канонической схемы к последовательной?
- 4.6. Какие условия используются при построении эквивалентных схем?
- 4.7. Зависят ли условия эквивалентности схем от вида источника питания?

- 4.8. Как выполняется расчет цепи по мгновенным значениям при смешанном соединении элементов?
- 4.9. Опишите порядок расчета цепей в стационарном режиме по комплексным значениям.
- 4.10. Чем отличается комплексное мгновенное значение тока от его комплексной амплитуды?
- 4.11. Почему при расчете по комплексным значениям используют комплексные амплитуды, а не комплексные мгновенные значения?
- 4.12. Как выполняется переход от комплексной амплитуды тока к его мгновенному значению?
- 4.13. Как по известному мгновенному значению тока записать его комплексное действующее значение?
- 4.14. Почему при расчете цепи по комплексным значениям уравнения цепи получаются алгебраическими?
- 4.15. Как записывают комплексные сопротивления и проводимости цепи?
- 4.16. Как выполняется расчет цепи при синусоидальном периодическом напряжении или токе?
- 4.17. Как выполняется расчет мощности по комплексным значениям напряжения и тока?
- 4.18. Как определяется реактивная мощность в цепи синусоидального переменного тока?
- 4.19. Какие особенности имеет цепь при резонансе напряжений?
- 4.20. Какие особенности имеет цепь при резонансе токов?

К разделу 5

- 5.1. Как выполняется расчет цепей в нестационарном режиме по мгновенным значениям напряжения и тока?
- 5.2. Зависит ли вынужденная составляющая напряжения или тока от начальных запасов энергии в реактивных элементах?
- 5.3. Какая составляющая реакции цепи называется свободной?
- 5.4. От чего зависит порядок дифференциального уравнения электрической цепи?
- 5.5. Чем отличаются законы коммутации электрической цепи при корректной и некорректной коммутации?
- 5.6. Для чего используются законы коммутации при расчете нестационарных процессов в электрической цепи?
- 5.7. Что такое системная (схемная) функция цепи?
- 5.8. Какая системная функция называется входной?
- 5.9. Какая системная функция называется передаточной?
- 5.10. Что такое переходная характеристика цепи?

К разделу 6

- 6.1. Назовите основные методы расчета сложных электрических цепей.
- 6.2. Какие методы нельзя использовать при расчете цепей с нелинейными элементами?
- 6.3. Как составляется контурная матрица?
- 6.4. Как составляется матрица сечений?
- 6.5. Чем отличается узловая матрица от матрицы сечений?
- 6.6. Как составляется матрица узловых проводимостей?
- 6.7. Как составляется матрица контурных сопротивлений?
- 6.8. Чем отличаются матрицы узловых проводимостей для обратимых и необратимых цепей?
- 6.9. Как можно составить сигнальный направленный граф?
- 6.10. Каким образом выполняется решение сигнального направленного графа?

К разделу 7

- 7.1. Назовите основные особенности трехфазных электрических цепей.
- 7.2. Какие напряжения и токи называются фазными?
- 7.3. Какие напряжения и токи называются линейными?
- 7.4. Как определяются фазные напряжения в схеме звезды при известных линейных напряжениях?
- 7.5. Как изменятся фазные напряжения приемника при обрыве линейного провода в схеме звезды без нулевого провода?
- 7.6. Как определяются линейные токи в схеме треугольника при известных фазных токах?
- 7.7. Как определяется нулевое напряжение при неравномерной нагрузке фаз приемника в схеме звезды без нулевого провода?
- 7.8. К каким последствиям приводит короткое замыкание одной из фаз приемника в схеме звезды без нулевого провода?

К разделу 8

- 8.1. Чем отличаются пассивные фильтры от активных?
- 8.2. Для чего нужно согласовывать пассивный фильтр с нагрузкой?
- 8.3. Почему пассивные фильтры делают многосвязными?
- 8.4. Какими вторичными параметрами характеризуется симметричный пассивный фильтр?
- 8.5. Как определяется полоса пропускания пассивного реактивного фильтра?
- 8.6. Как определяется полоса пропускания активного RC-фильтра?
- 8.7. Как определяется постоянная затухания пассивного фильтра?

- 8.8. Чему равен коэффициент передачи реактивного пассивного фильтра в полосе пропускания?
- 8.9. Какую роль выполняет операционный усилитель в схеме активного фильтра?
- 8.10. Нужно ли выполнять согласование активного фильтра с нагрузкой?

К разделу 9

- 9.1. Почему линии передачи относятся к цепям с распределенными параметрами?
- 9.2. Что такое первичные параметры линии передачи?
- 9.3. Какими вторичными параметрами характеризуются линии передачи?
- 9.4. Какие волны существуют в согласованной линии передачи?
- 9.5. Какие волны существуют в разомкнутой линии передачи?
- 9.6. Для каких целей используют короткозамкнутые отрезки линий?
- 9.7. Какими свойствами обладает линия передачи без потерь?
- 9.8. При каких условиях в линии передачи устанавливается режим стоячих волн?
- 9.9. При каких условиях в линии передачи устанавливается режим бегущих волн?
- 9.10. Какие способы используются для согласования линии передачи с нагрузкой?

К разделу 10

- 10.1. Какие цепи называются нелинейными?
- 10.2. Какими свойствами обладают нелинейные резистивные элементы?
- 10.3. Зависит ли форма реакции нелинейной цепи от вида источника питания?
- 10.4. Почему в цепях с нелинейными резистивными элементами возможны автоколебания?
- 10.5. Какие особенности имеет метод кусочно-линейной аппроксимации ВАХ нелинейной цепи?
- 10.6. Чем отличается отрицательная емкость от положительной?
- 10.7. Какие особенности имеют цепи с нелинейными индуктивными элементами?
- 10.8. Чем отличаются режимы свободного и вынужденного намагничивания нелинейной катушки индуктивности?
- 10.9. Для чего используется метод гармонической линеаризации нелинейной цепи?
- 10.10. Какие виды потерь существуют в нелинейной катушке индуктивности?

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Круг. Основы электротехники. Том 1 и 2. М., Госэнергоиздат, 1946.
2. Атабеков Г. И. Теория линейных электрических цепей. М., Советское радио, 1960.
3. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники. М., Энергия, 1978.
4. Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В., Страхов С. В. Основы теории цепей. М., Энергия, 1965.
5. Нейман Л. Р., Калантаров А. Л. Теоретические основы электротехники. Части 1 и 2. М., Госэнергоиздат, 1959.
6. Поливанов К. М. Теоретические основы электротехники, ч. 1. Энергия, М., 1965.
7. Нетушил А. В., Страхов С. В. Основы электротехники. М., Госэнергоиздат, 1955.
8. Теоретические основы электротехники. Том 1. Основы теории линейных цепей. Под ред. П. А. Ионкина. М., Высшая школа, 1978.
9. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. М., Высшая школа, 1978.
10. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. М., Высшая школа, 1972.
11. Глазенко Т. А., Прянишников В. А. Электротехника и основы электроники. М., Высшая школа, 1 изд., 1985; 2-е изд., 1996.
12. Татур Т. А. Основы теории электрических цепей. М., Высшая школа, 1960.
13. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. М., Высшая школа, 1983.
14. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. Том 1 и 2, М., Энергия, 1966.
15. Попов В. П. Основы теории цепей. М., Высшая школа, 1985.
16. Евдокимов Ф. Е. Теоретические основы электротехники. М., Высшая школа, 1981.
17. Жуховицкий Б. Я., Негиевский И. Б. Теоретические основы электротехники. Том 2. М., Энергия, 1972.
18. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М., Советское радио, 1966.

Виктор Алексеевич Прянишников
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ
Курс лекций

4-е издание

Ответственный за выпуск *Зимина М. С.*
Обложка *Чикулаев А. А.*
Верстка *Барышникова Т. К.*

ООО «КОРОНА принт»
ЛР № 065007 от 18 февраля 1997 г.
198005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., д. 29.
тел. (812) 251-33-94

Подписано в печать 24.12.2003. Формат 70x100/16
Бумага газетная. Печать офсетная. Объем 23 печ. л. Тираж 5000 экз. Заказ №

Отпечатано с готовых диалозитивов в ФГУП ордена Трудового Красного Знамени «Техническая книга» Министерства РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
198005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29